Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Étranger groupe I [1] juin 1972 ∾

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^2 [1 - |x - 1|]^3 \, \mathrm{d}x.$$

EXERCICE 2

Démontrer que, si trois nombres entiers relatifs, x, y et z, sont tels que la somme $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 3, alors la somme $x + y + z$ est aussi divisible par 3.
Démontrer que si $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9, alors l'un au moins des trois nombres x, y et z est divisible par 3.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'axes O$x$ et Oy ; a est un nombre réel fixe, φ est un nombre réel qui jouera le rôle de paramètre, mais on suppose vérifiée, tout au long du problème, la condition $\sin(\varphi - a) \neq 0$.

Partie A

1. Démontrer que les formules

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{lcl}\left(x - x'\right)\sin\varphi &=& \left(y - y'\right)\cos\varphi,\\ \left(x + x'\right)\sin a &=& \left(y + y'\right)\cos a,\end{array}\right.$$

déterminent une application, T_φ du plan dans lui-même, qui, au point $M(x~;~y)$, associe le point $M'\left(x'~;~y'\right)$.
Déterminer les expressions de x' et de y' en fonction de x et de y.
Démontrer que T_φ est involutive.

2. Démontrer que T_φ laisse invariants une infinité de points et que leur ensemble, (Δ), ne dépend pas de φ.
3. Lorsque a et φ sont fixés, quel est l'ensemble des milieux des segments $[MM']$?

Partie B

1. Quelle est la nature géométrique de T_φ ? Interpréter géométriquement les deux nombres a et φ.
2. P est un point fixe n'appartenant pas à (Δ) ; Pφ est son transformé par T_φ ; a restant fixe et φ prenant toutes les valeurs compatibles avec la condition posée $\sin(\varphi - a) \neq 0$, déterminer l'ensemble des points Pφ.

Partie C

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire

On suppose désormais $a = \dfrac{\pi}{2}$; et l'on appelle F l'ensemble des T_φ ; on pose tg $\varphi = \lambda$ et $T_\varphi = \theta_\lambda$.
On note $\theta_\beta \circ \theta_\alpha$ la composée de θ_α par θ_β.

1. Montrer que l'application composée $\theta_{\lambda_3} \circ \theta_{\lambda_2} \circ \theta_{\lambda_1}$ de trois éléments de F est un élément θ_μ de F ; on calculera μ en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3.
2. Montrer que le composé d'un nombre impair d'éléments de F est un élément de F, que l'on précisera.
3. Démontrer que le composé d'un nombre pair d'éléments de F est, d'une infinité de manières, le composé de deux éléments de F.
4. Démontrer que les composés d'éléments de F forment un groupe ; en indiquer un sous-groupe isomorphe au groupe additif des nombres réels.