Durée : 4 heures

Baccalauréat C Centres étrangers groupe 1 juin 1982

EXERCICE 1 **4 points**

1. Dans $\mathbb{Q}$, résoudre le système à l'inconnue $(x,\ y,\ z)$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y-4z &=& -1\\ 3x+y-2z &=& 2.\end{array}\right.$$

2. Dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, résoudre le système à l'inconnue $(x,\ y,\ z)$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+\overline{2}y-\overline{4}z &=& -\overline{1}\\ \overline{3}x+y-\overline{2}z &=& \overline{2}.\end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 points**

On donne un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ dont le plan vectoriel associé est noté P, un triangle $A_1A_2A_3$ de $\mathscr{P}$ et une similitude $\mathscr{S}$ de P. On note $B_1B_2B_3$ le triangle de $\mathscr{P}$ défini par

$$\overrightarrow{A_2B_1} = \mathscr{S}\left(\overrightarrow{A_2A_3}\right),\quad \overrightarrow{A_3B_2} = \mathscr{S}\left(\overrightarrow{A_3A_1}\right)\quad \overrightarrow{A_1B_3} = \mathscr{S}\left(\overrightarrow{A_1A_2}\right).$$

1. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$ (barycentre des sommets affectés de coefficients égaux). Montrer que G est aussi l'isobarycentre du triangle $B_1B_2B_3$.

2. On rapporte le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal direct d'origine G. On appelle $a_1,\ a_2,\ a_3$ les affixes de $A_1A_2A_3$ et $b_1,\ b_2,\ b_3$ les affixes de $B_1,\ B_2,\ B_3$. On désignera par s le nombre complexe associé à la similitude $\mathscr{S}$ c'est-à-dire que, si z est le nombre complexe associé à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de P et z' le nombre complexe associé au vecteur $\overrightarrow{v'}$ transformé de v par $\mathscr{S}$, on a $z' = sz$.

Montrer qu'il existe, en général, deux similitudes $\mathscr{S}$ telles que le triangle $B_1B_2B_3$ soit équilatéral et que celles-ci sont indépendantes du choix du triangle $A_1A_2A_3$.

Quel est le cas d'exception ?

N.B. - On utilisera le nombre complexe j de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

PROBLÈME **12 points**

Partie préliminaire

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, calculer l'intégrale

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx\,\mathrm{d}x.$$

2. Montrer que chacune des cinq fonctions numériques :

$$\begin{array}{lcl}
x & \longmapsto & x - \sin x\\
x & \longmapsto & -1 + \dfrac{x^2}{2} + \cos x\\
x & \longmapsto & -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x\\
x & \longmapsto & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x\\
x & \longmapsto & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \sin x
\end{array}$$

ne prend que des valeurs positives (au sens large) sur l'intervalle [0 ; +00[.

3. Montrer que, pour $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$,

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

vérifie 1 (x2) 1 1

$$\frac{1}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20}\right) \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{6}\frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{6}}.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application continue f_n de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant sin nx J nJ

$$f_n(0) = n, \quad f_n(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin x} \quad \text{pour tout } x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

Montrer que l'application f_n est dérivable et calculer $f_n'(0)$.
On utilisera les résultats de la partie préliminaire 2.

2. Pour $n \geqslant 1$, on désigne par C_n la représentation graphique de f_n par rapport à un repère orthonormal donné (unité graphique : 2 cm). Déterminer les abscisses des points communs à C_n et C_{n+1}. Construire C_1, C_2, C_3.
Interpréter en terme d'aire l'intégrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad (n \geqslant 2)$$

3. On note $\omega = \int_0^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ où φ est l'application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par sin t .

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0.$$

On admettra que l'intégrale ω, que l'on ne cherchera pas à calculer, s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

où la fonction continue φ_n est définie par

$$\varphi_n(0) = n, \quad \varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Pour $n \geqslant 2$, justifier l'égalité

$$A_n - \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire 7t (7t2) 7t 1

$$\frac{\pi}{6n^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{20n^2}\right) \leqslant A_n - \omega \leqslant \frac{\pi}{6n^2}\frac{1}{1 - \dfrac{\pi^2}{6n^2}}$$

Trouver les limites des suites $(A_n)_{n \geqslant 2}$ et $\left(n^2 (A_n - \omega)\right)_{n>2}$.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.

2. Exprimer $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n et en déduire une expression de I_n ne faisant intervenir aucun symbole d'intégration.

N. B. - On rappelle la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$