Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Centres étrangers groupe 1 bis juin 1982 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Démontrer que, si un entier naturel premier p est tel que la somme de tous les diviseurs de p^4 est le carré d'un entier naturel n, alors

$$2p^2 + p < 2n < 2p^2 + p + 2.$$

En déduire l'existence et l'unicité de p ainsi que le calcul du couple $(p,\ n)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans un plan affine euclidien orienté, une similitude directe $\mathscr{S}_\text{O}$ de centre O transforme un couple donné (A, B) de points distincts, autres que O, en un couple (A$'$, B$'$).
La similitude directe $\mathscr{S}_\text{A}$ de centre A qui transforme B en B$'$, transforme O en P. La similitude directe $\mathscr{S}_\text{B}$ de centre B qui transforme A en A$'$, transforme O en Q.
Démontrer que O est le milieu de (P, Q).

PROBLÈME **12 points**

On donne les deux applications numériques

$$\begin{array}{lccccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x & \longmapsto & -1+\sqrt{1+x^2} \quad \text{et}\\ \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{1+|x|}\end{array}$$

1. Démontrer que f et φ sont paires, continues et dérivables.
   Étudier $f(x)$ et $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que les courbes représentatives $\mathscr{C}$ de f et Γ de φ rapportées au repère orthonormé direct $\mathscr{R}$ (unité : 2 cm) admettent pour asymptotes deux droites ayant respectivement pour équation

   $$y = x - 1 \quad \text{et} \quad y = -x - 1.$$

   Étudier les variations de f et de φ.
2. Démontrer que, quel que soit x réel,

   $$1+|x| \leqslant 1+\sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant \varphi(x).$$

   En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et Γ que l'on construira en plaçant les points d'abscisses 1, 2, 3, 4 notamment, points dont les ordonnées seront calculées à 0,1 près par excès. Justifier la position de $\mathscr{C}$ et Γ par rapport à leurs asymptotes communes.
3. Démontrer que l'application numérique

   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   est paire, continue et dérivable et que l'application numérique

   $$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \text{Log}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

   est l'une de ses primitives.

(Log désigne le logarithme népérien).

Démontrer par une intégration par parties que

$$\int_0^x \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ ensemble des points M dont les couples de coordonnées $(x\,;\,y)$ sont tels que

$$0 \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x).$$

Calculer la valeur numérique de $\mathscr{A}$ à $0,01$ près par défaut.

4. Soit $\mathscr{C}_\alpha$ le cercle passant par O origine de $\mathscr{R}$ et centré en I dont le couple de coordonnées est $(0,\ \alpha)$ avec $\alpha > 0$.

Former l'équation aux *ordonnées* des points communs à C et $\mathscr{C}_\alpha$. Montrer que ces deux courbes ont deux points communs A et A$'$ autres que O si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Dans la suite $a(\alpha)$ désigne la valeur absolue commune des abscisses de A et A$'$.

Démontrer que la droite AA$'$ coupe le segment [OI].

Pour quelle valeur α_1 de α, A, A$'$ et O sont-ils confondus ?

Démontrer que α_1 est la limite de $\dfrac{x^2}{2f(x)}$ quand x tend vers zéro.

Calculer l'ordonnée $q(x)$ du point Q d'abscisse x de l'arc $\widehat{\text{AOA}'}$ de $\mathscr{C}_\alpha$. Démontrer que

$$|x| \leqslant a(\alpha) \Rightarrow f(x) \geqslant q(x).$$

En déduire la position relative des arcs $\widehat{\text{AOA}'}$ de C et $\mathscr{C}_\alpha$.