

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Étranger groupe Ibis juin 1986 ☞

EXERCICE 1

5 points

Soit dans un plan, un triangle $A_1A_2A_3$. À tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A_3 , du triangle, on associe :

a. les points M_1, M_2, M_3 , symétriques de M dans les symétries orthogonales $s_{(A_2A_3)}$, $s_{(A_3A_1)}$, $s_{(A_1A_2)}$ d'axes respectifs (A_2A_3) , (A_3A_1) , (A_1A_2) .

b. Les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites (M_2M_3) , (M_3M_1) , (M_1M_2) .

Les symétries orthogonales d'axes Δ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, sont notées s_{Δ_i} .

On désigne par $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ des vecteurs directeurs respectifs de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

1. Démontrer que Δ_1 est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.

2. Soit $s = s_{(A_1A_3)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_2)}$.

a. Quelle est la nature de s ?

b. Déterminer $s(A_1)$ et $s(M)$. Caractériser s .

c. Démontrer que

$$\left(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1M} \right) \equiv \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{A_1A_2} \right) \quad (\pi) \quad (1)$$

3. Établir d'une manière analogue

$$\left(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2M} \right) \equiv \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{A_2A_3} \right) \quad (\pi) \quad (2)$$

$$\text{et } \left(\overrightarrow{A_3A_2}, \overrightarrow{A_3M} \right) \equiv \left(\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{A_3A_1} \right) \quad (\pi) \quad (3)$$

4. Montrer que l'ensemble (C) des points M du plan, distincts des sommets A_1, A_2, A_3 , tels que les points M_1, M_2, M_3 soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$.

5. On suppose, dans cette question, que le point M n'appartient pas à (C) .

a. Démontrer que les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.

Dans la suite du problème ce point P appelé l'associé du point M .

b. Quel est l'associé d'un point M appartenant aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle?

c. On suppose que le point M n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1A_2A_3$. Démontrer, en utilisant les relations (1), (2) et (3) que si M a pour associé P alors le point P a pour associé le point M .