

∞ Baccalauréat C Étranger groupe I¹ septembre 1972 ∞

EXERCICE 1

Dans l'espace affine euclidien orienté \mathcal{E} de dimension trois, on désigne par \mathcal{T} la translation de vecteur \vec{V} , non nul, par Δ un déplacement quelconque, par \circ la loi de composition des transformations ponctuelles.

Démontrer qu'une condition, nécessaire et suffisante, pour que l'on ait

$\Delta = \mathcal{T} \circ \Delta \circ \mathcal{T}$, est que Δ soit un déplacement hélicoïdal d'angle π et d'axe orthogonal à \vec{V} .

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien orienté \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $M(z)$

le point M , image du nombre complexe z , les nombres j et j^2 étant les nombres complexes $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ et $\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$.

Aux trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ on associe les nombres

$$u = a + bj + cj^2 \quad \text{et} \quad v = a + bj^2 + cj.$$

De même, aux trois points $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ sont associés

$$u' = a' + b'j + c'j^2 \quad \text{et} \quad v' = a' + b'j^2 + c'j.$$

1. Montrer que u reste invariant quand on change l'origine du repère, la base (\vec{i}, \vec{j}) étant conservée.
2. Montrer qu'une condition, nécessaire et suffisante, d'existence d'une similitude directe, dans laquelle A' , B' et C' sont respectivement les images de A , B et C , s'écrit

$$uv' - v u' = 0.$$

PROBLÈME

L'entier naturel n étant au moins égal à 1, on note g_n la fonction qui, à tout réel x strictement supérieur à n , associe

$$g_n(x) = (x-n)\text{Log } x - x\text{Log } (x-n),$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'inéquation $(x+1)^2 < 2x^2$.
En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'inégalité $p^2 < 2p$ est vérifiée pour toute valeur de l'entier naturel p supérieure ou égale à 5.
Déterminer les signes de $g_n(n+1)$ et de $g_n(n+2)$ selon les valeurs de n .
2. Calculer les dérivées première et seconde, $g'_n(x)$ et $g''_n(x)$, de $g_n(x)$ par rapport à la variable x . En déduire le sens de variation de g'_n et le signe de $g''_n(x)$, puis le sens de variation de g_n .

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire.

3. Trouver les limites de $g_n(x)$ lorsque x tend vers n et lorsque x tend vers $+\infty$.
Il pourra être commode d'écrire

$$g_n(x) = -n \operatorname{Log} x - x \operatorname{Log} \left(1 - \frac{n}{x}\right).$$

Tracer la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé.

4. Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ a une racine, et une seule, notée x_n et que $x_n - n$ tend vers 1, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Quelle est la limite dans les mêmes conditions de $x_{n+1} - x_n$?

5. Calculer l'intégrale

$$F(a) = \int_a^{x_2} g_2(x) \, dx, \quad \text{pour } a \in]2; x_2],$$

et trouver la limite de $F(a)$, lorsque a tend vers 2.