

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Étranger groupe I ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} x = 0$, x étant l'inconnue.
2. Donner l'expression de $\operatorname{tg} 2x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$, puis celle de $\operatorname{tg} 4x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$.
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $y^4 - 10y^2 + 5 = 0$.
4. En utilisant les trois questions précédentes donner des valeurs numériques approchées de $\operatorname{tg}\left(k\frac{\pi}{5}\right)$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.
(Le candidat indiquera éventuellement l'instrument - règle ou table - qu'il a utilisé pour faire le calcul demandé.)

EXERCICE 2

1. Donner une définition de la fonction logarithme népérien.
2. Montrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 < a < b$, on a

$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_0^b \frac{1}{t} dt < \frac{1}{a}(b-a).$$

3. Montrer que pour tout entier strictement positif n on a :

$$\frac{1}{n+1} < \operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} < \frac{1}{n}.$$

(Le symbole Log désigne le logarithme népérien.)

4. Dédurre de ce qui précède que

$$\operatorname{Log}(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

5. Donner une valeur de n pour laquelle

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 10.$$

PROBLÈME

Soit un plan affine P rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on considère l'application T de P dans P qui à chaque point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ par les relations :

$$\begin{cases} x' &= a + \alpha x + \beta y \\ y' &= b + \gamma x + \delta y \end{cases}$$

où $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.

Première partie

1. Montrer que l'application T est définie par la donnée des images des trois points $O(0; 0)$, $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$.

2. On considère le point $C(c; d)$ et on donne les images par T des trois points O, A et C .
Peut-on ainsi définir T quel que soit le point C choisi dans le plan?
3. À quelle condition la donnée de trois points du plan et de leurs images définit-elle une application affine de ce plan dans lui-même?
Pouvait-on le prévoir?

Deuxième partie

1. Écrire la condition pour que T ait un point invariant et un seul.
Écrire les conditions pour que T ait une droite de points invariants.
2. a. On donne les images $O'(m; n), A'(2; 3)$ et $B'(2; 5)$ des trois points O, A, B .
Discuter suivant la position du point O' dans le plan le nombre de points invariants de l'application T ainsi définie.
b. Répondre à la même question lorsque, A' restant inchangé, on prend le point B' de coordonnées $(2; 7)$.
Montrer que, dans ce cas-là, si O' décrit une droite Ω l'application T admet une droite Δ de points invariants et que cette droite Δ passe par un point fixe ω lorsque O' décrit Ω .

Troisième partie

Plus généralement on choisit $O'(m; n), A'(2; 3)$ et $B'(p; q)$ comme images de O, A et B .

1. Écrire la condition liant les coordonnées de O' et B' pour que T n'ait pas un point double unique.
2. Cette condition étant réalisée, montrer que O' doit être choisi sur une droite fixe Ω si l'on veut que T possède une droite Δ de points invariants.
3. O' étant choisi sur Ω montrer que B' doit être pris sur une droite D parallèle à Ω pour que T ait une droite Δ de points invariants.
Le point O' peut-il être pris quelconque sur Ω ?
4. Une droite quelconque du plan peut-elle être une droite Δ pour un choix convenable de O' et de B' ?