∽ Baccalauréat C Étranger Groupe I bis juin 1979 [1] ∾

EXERCICE 1 **4 points**

On donne une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.
On construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{q_0} \\ u_1 & = & \dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q_0q_1} \\ \cdots & = & \cdots \\ u_n & = & \dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q_0q_1}+\cdots+\dfrac{1}{q_0q_1\cdots q_n} \end{array}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et peut être majorée par une suite convergente (ne dépendant par exemple que de q_0).
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, qui appartient à l'intervalle $]0~;~1]$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si, pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier k, $q_n = q_k$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un rationnel.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, tracer la courbe $\mathscr{C}$ définie par l'équation :

$$2ay = x^2 \quad a \text{ réel positif donné.}$$

2. Calculer la pente (ou coefficient directeur) de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_1 d'abscisse x_1.
   Quelle relation doivent vérifier les abscisses x_1 et x_2 de deux points M_1 et M_2 de C pour que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points soient orthogonales ?
3. Démontrer que la droite M_1M_2 déterminée par deux points de $\mathscr{C}$ ainsi associés passe par un point fixe qu'on placera sur la figure.
   Déterminer l'ensemble décrit par l'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en M_1 et M_2.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

$\mathbb{C}$ désignant le corps des nombres complexes, on pose :

$$\mathrm{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifiera que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.
Soit F l'application polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$z \longmapsto F(z) = z(z+1)\left(z-\mathrm{j}^2\right)+\frac{2}{9}(\mathrm{j}-4).$$

1. dont Espagne, Liban, Portugal

1. Déterminer les coefficients complexes a et b de façon que l'application σ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \longmapsto \sigma(z) == az + b$ vérifie les deux conditions :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\sigma\left(\text{j}^2\right) & = & 0\\ \sigma(0) & = & -1.\end{array}\right.$$

Comparer alors $\sigma(-1)$ et j^2.

2. On considère l'application s de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dépendant du paramètre complexe m :
$z \longmapsto s(z) = mz - 1$.
Peut-on déterminer m de façon que $\forall z \in \mathbb{C})\quad F[s(z)] = F(z)$?
(On admet que deux applications polynômes sont égales si et seulement si les polynômes ordonnés ont les mêmes coefficients).
Comparer au résultat de 1.

3. Soit r l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \longmapsto r(z) = \text{j}z - 1$.
Déterminer l'unique complexe z_0 invariant par r.
Vérifier $z_0^2 = -\dfrac{1}{3}\text{j}^2$.
Calculer $r \circ r \circ r$. Vérifier que, pour tout z, dans $\mathbb{C}$ muni de sa structure d'espace affine réel, z_0 est l'isobarycentre du triplet $\left(z,\ r(z),\ r^2(z)\right)$.

4. Pour λ complexe, développer et ordonner $F\left(z_0 + \lambda\right)$.
En déduire que l'équation $F(z) = 0$ admet trois racines complexes, préciser celles-ci et les situer sur une figure du plan complexe.

Partie B

Soit E un plan vectoriel réel (espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). Un endomorphisme f de E est dit ternaire si $f0f0f = \text{Id}_{\text{E}}$, application identique de E.
(Dans la suite on notera $f \circ f \circ f = f^2 \circ f = f^3$, $f^3 \circ f = f^4$, etc.)

1. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme ternaire de E, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de E tel que le système $(\overrightarrow{u},\ f\left(\overrightarrow{u}\right))$ soit lié. Montrer que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$.
En déduire qu'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f soit de la forme $A = \begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & k\end{pmatrix}$, $h,\ k$ étant deux réels.
Démontrer que f est nécessairement l'application identique. (On calculera A^3).

2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E, et que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de E, le système $(\overrightarrow{u},\ f\left(\overrightarrow{u}\right))$ est libre. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de E, et $\overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)$;
alors il existe deux réels $p,\ q$ tels que la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$ soit $B = \begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & q\end{pmatrix}$.
Calculer p et q de façon que f soit ternaire.
$p,\ q$ ayant les valeurs trouvées, et π désignant un plan affine attaché à E, démontrer, analytiquement ou par tout autre procédé, que toute application affine g de π dans π admettant f comme endomorphisme associé admet un point invariant unique et vérifie $g \circ g \circ g = \text{Id}_{\pi}$.

3. Plus généralement, soit F l'endomorphisme de E dont la matrice, dans une base $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$ de E, est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel donné appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

On définit sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}\right) = 1, \quad \Phi\left(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{v}\right) = 1, \quad \Phi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) = \cos\theta$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur E, et que F est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien (E, Φ) ?

E étant supposé orienté par la base $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$, déterminer le vecteur $\overrightarrow{w}$ de E de façon que $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ soit une base directe et orthonormée relativement à Φ.

Former la matrice de F dans cette nouvelle base.

Quelle est la nature de F dans (E, Φ) ? À quelle condition, n étant un entier donné supérieur ou égal à 3, a-t-on $F^n = \text{Id}_E$?