Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1975 Étranger groupe Ibis ∾

EXERCICE 1

1. Montrer que les solutions de l'équation

$$|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|, \quad z \in \mathbb{C}$$

sont tous les nombres réels.

En déduire que toute solution de l'équation

$$(E) \qquad (z+\mathrm{i})^3 = \mathrm{i}(z-\mathrm{i})^3, \quad z \in \mathbb{C}$$

peut s'écrire :

$$z = \operatorname{tg}\alpha,\ \text{avec}\ \alpha \in \mathbb{R}\ \text{et}\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Résoudre (E).

2. Déduire une seconde méthode de résolution de (E) du fait que -1 est solution de (E).

De la comparaison des résultats fournis par les deux méthodes, déduire une valeur numérique de $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2

1. Montrer qu'il existe une, et une seule, application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel mais non entier relatif on ait :

$$f(x) = x + (x - \mathrm{E}(x))\,\mathrm{Log}\ (x - \mathrm{E}(x))\,,$$

égalité dans laquelle $\mathrm{E}(x)$ désigne l'entier relatif défini par :

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < 1 + \mathrm{E}(x).$$

Cette application f est-elle dérivable ?

2. À tout $n \in \mathbb{Z}$, on associe la restriction f_n de f à l'intervalle $[n\,;\,n+1]$.

On désigne par C_n la représentation graphique de f_n dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

Etudier f_0 et construire C_0.

On montrera que C_0 admet une « demi-tangente » en chacune de ses extrémités.

Comment pourrait-on déduire C_n de C_0 ?

PROBLÈME

On donne un plan affine P et un repère $r = \left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ de P.

Soit C la courbe de P dont une équation dans le repère r est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0\ \text{et}\ b > 0\ \text{sont donnés}).$$

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{T}$ des applications affines de P dans P qui conservent O et qui transforment tout point de C en un point de C.

1. Montrer que tout élément de $\mathcal{T}$ est une bijection, dans laquelle l'image de C est C.
Montrer que $\mathcal{T}$, $\circ$) est un groupe.

2. Établir que $\mathcal{T}$ est l'ensemble des applications de la forme $t_{\epsilon,\,\theta} : (x\ ;\ y) \longmapsto (x'\ ;\ y')$, avec (dans le repère r) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x\cos\theta - \epsilon\frac{a}{b}y\sin\theta \\ y' & = & x\sin\theta + \epsilon y\cos\theta \end{array}\right.$$

(ϵ et θ décrivent respectivement les ensembles $\{-1,\ +1\}$ et $\mathbb{R}$).
[On pourra chercher les relations qui doivent lier les réels α, β, γ, δ pour que l'application représentée dans le repère r par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \alpha x + \beta y \\ y' & = & \gamma x + \delta y \end{array}\right.$$

appartienne à l'ensemble $\mathcal{T}$, (on pourra poser

$$\beta = \frac{a}{b}\beta', \quad \gamma = \frac{b}{a}\gamma').$$

3. Selon que $\epsilon = +1$ ou $\epsilon = -1$, on écrit $t_{\epsilon,\,\theta} \in \mathcal{T}_+$, ou $t_{\epsilon,\,\theta} \in \mathcal{T}_-$.
Montrer que $\mathcal{T}_+$ est un sous-groupe de $\mathcal{T}$.
En est-il de même de $\mathcal{T}_-$?

4. *Dans toute la suite*, on suppose que le plan affine P est euclidien, sans que le repère $r = \left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ soit nécessairement orthonormé.
On désigne par A et B les points de C définis par :

$$\overrightarrow{\text{OA}} = a\,\overrightarrow{\imath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OB}} = b\,\overrightarrow{\jmath}.$$

À tout élément f de $\mathcal{T}$ on associe les images A$'$ et B$'$ de A et B par f, ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{\imath'}$ et $\overrightarrow{\jmath'}$ tels que

$$\overrightarrow{\text{OA}'} = a\,\overrightarrow{\imath'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OB}'} = b\,\overrightarrow{\jmath'}.$$

a. Ecrire (autant que possible sans calcul) une équation de C dans le repère $r' = \left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath'},\ \overrightarrow{\jmath'}\right)$.

b. Déterminer $f = t_{\epsilon,\,\theta}$ de façon que le repère r' soit orthogonal ; pour cela on exprimera le produit scalaire $\overrightarrow{\imath'} \cdot \overrightarrow{\jmath'}$ en fonction de ϵ, de θ, et des réels :

$$\left\|\overrightarrow{\imath}\right\|^2 = \ell, \quad \overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{\jmath} = m, \quad \left\|\overrightarrow{\jmath}\right\|^2 == n.$$

Combien cette question a-t-elle de solutions ?
Déduire de cette étude que (dans le cas où P est euclidien) la courbe C est une ellipse.

c. Montrer que, lorsque f décrit $\mathcal{T}$, alors :

$$\left\|\overrightarrow{\text{OA}'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\text{OB}'}\right\|^2 \text{ et aire } (\text{A}'\text{OB}') \text{ restent constants.}$$

On pourra admettre que si M_1 et M_2 sont deux points de P de coordonnées $(X_1\ ;\ Y_1)$ et $(X_2\ ;\ Y_2)$ dans un repère quelconque $\left(\text{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ alors l'aire du triangle $M_1\text{O}M_2$ est :

$$\frac{1}{2}\left|(X_1Y_2 - Y_1X_2)\sin\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)\right|$$