

Baccalauréat C juin 1990 Centres étrangers II¹

EXERCICE 1

4 points

(A, B, C) est un triangle, on pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [AC], C' celui de [AB].

Soit G l'isobarycentre du triangle (A, B, C).

1. Montrer que pour tout point M du plan,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

2. En calculant de deux façons différentes $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})^2$ établir que :

$$2\vec{MA} \cdot \vec{MA'} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

3. On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC], montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

EXERCICE 2

4 points

On considère la suite u définie par :

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \ln(n+k) \right] - \ln(n).$$

(ln désigne le logarithme népérien de base e).

1. Démontrer que $u_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$.

2. a. Pour k entier, compris entre 0 et n-1, démontrer que :

$$\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k+1}{n} \right).$$

- b. En déduire que :

$$u_n - \frac{1}{n} \ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq u_n.$$

3. Déduire de ce qui précède un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

12 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm).

A est le point d'affixe 2i.

D est la droite d'équation $y = 2$.

1. Portugal, Grèce, Tunisie, Abou Dhabi

Un point P décrivant la droite D, on se propose de construire l'ensemble S des points M et M' de la droite (OP) tels que $PM = PM' = PA$.

(On appelle M le point de S situé entre O et P.)

On note $\Theta = (\vec{u}, \vec{OP})$ avec $\Theta \in]0; \pi[$.

I.] Placer le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la droite D et le point A (fig. 1).

1. Construire les points M et M' pour $\Theta = \frac{\pi}{6}$, $\Theta = \frac{\pi}{4}$, $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\Theta = \frac{3\pi}{4}$.
2. L'ensemble S contient-il A? Contient-il d'autres points de D?
3. Montrer que (OA) est axe de symétrie de S.
4. Soit Δ la médiatrice de [OA]. Montrer que si M appartient à S et à Δ le point P d'intersection de (OM) avec D vérifie $PO = 2PA$.
En déduire la construction sur la figure 1, de $S \cap \Delta$ puis de 4 points de S.

II.

1. Montrer que l'affixe z_p du point P est :

$$z_p = 2 \frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)} + 2i.$$

2. Calculer les distances AP puis OM' en fonction de Θ .
En déduire l'affixe z' du point M' puis l'affixe z du point M.
3. a. Vérifier que l'ensemble des points M' est la courbe paramétrée :

$$S_1 \begin{cases} x_1(\Theta) &= 2 \frac{1 + |\cos(\Theta)|}{\sin(\Theta)} \cos(\Theta) \\ y_1(\Theta) &= 2(1 + |\cos(\Theta)|) \end{cases} \quad \Theta \in]0; \pi[.$$

- b. Vérifier que l'ensemble des points M est la courbe paramétrée :

$$S_2 \begin{cases} x_2(\Theta) &= 2 \frac{1 - |\cos(\Theta)|}{\sin(\Theta)} \cos(\Theta) \\ y_2(\Theta) &= 2(1 - |\cos(\Theta)|) \end{cases} \quad \Theta \in]0; \pi[.$$

III. On considère le domaine $D = [-\pi; 0[\cup]0; \pi]$ de la droite réelle et la courbe paramétrée S' formée des points de coordonnées $(x(\Theta); y(\Theta))$ avec

$$\begin{cases} x(\Theta) &= 2 \frac{1 + \cos(\Theta)}{\sin(\Theta)} \cos(\Theta) \text{ si } |\Theta| \neq \pi \\ x(\pi) &= x(-\pi) = 0 \\ y(\Theta) &= 2(1 + \cos(\Theta)) \end{cases}.$$

1. Comparer le point de coordonnées $(x(\Theta); y(\Theta))$ et celui de coordonnées $(x(-\Theta); y(-\Theta))$. Que peut-on en conclure pour la courbe S' ?
2. Calculer la limite lorsque Θ tend vers π par valeurs inférieures de $x(\Theta)$ et la limite lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures de $\frac{x(\pi-h)}{h}$, donner la valeur de $y'(\pi)$.
Que peut-on en déduire?
Calculer la limite lorsque Θ tend vers 0 par valeurs positives de $x(\Theta)$, de $y(\Theta)$.

3. a. Calculer, pour $|\Theta| \neq \pi$ la dérivée de la fonction x et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$2 \frac{\cos^2(\Theta) - \cos(\Theta) - 1}{1 - \cos(\Theta)}.$$

- b. Donner pour $\Theta \in]0 ; \pi]$ le tableau des variations des fonctions x et y .
- c. Préciser pour $\Theta \in]0 ; \pi]$ l'intersection de la courbe S' avec l'axe (O, \vec{v}) et la tangente à la courbe en ce point.
- d. Préciser pour $\Theta \in]0 ; \pi]$ le point où la courbe S' admet une tangente parallèle à \vec{v} .
4. Montrer que le point $(x(\Theta) ; y(\Theta))$ représente soit un point M soit un point M' ; préciser cette correspondance pour $\Theta \in D$.
5. Représenter graphiquement la courbe S' sur la figure 1 en indiquant les tangentes qui ont été calculées.