Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1980

EXERCICE 1

1. Le conjugué d'un élément z de $\mathbb{C}$ est noté $\overline{z}$. Soit E l'ensemble des éléments u de C tels que

$$u+\overline{u}+u\overline{u}=0.$$

Représenter l'ensemble des images des éléments de E.

2. Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC de centre (OA = OB = OC). Soit S l'ensemble des similitudes directes s de $\mathscr{P}$ telles que

$$(s(\text{O})=\text{O}) \quad \text{et} \quad (\text{A},\ s(\text{B}),\ s(\text{C}) \text{ sont alignés}).$$

Préciser l'ensemble décrit par s(A) lorsque s décrit S.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension trois, rapporté à une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$; O_E désigne l'endomorphisme nul de E.

On se propose de déterminer

— un endomorphisme f de E tel que $f\left(\vec{\imath}\right)=\vec{\jmath}$,

— un endomorphisme g de E tel que $g\left(\vec{\jmath}\right)=\vec{k}$,

ces endomorphismes satisfaisant en outre aux relations

$$f\circ f=\text{O}_\text{E},\quad g\circ g=\text{O}_\text{E},\quad f\circ g=g\circ f$$

1. On suppose qu'un tel couple $(f,\ g)$ d'endomorphismes existe. Démontrer que l'on a nécessairement

$$f\left(\vec{k}\right)=g\left(\vec{\jmath}\right)=\vec{0},\quad f\circ g=\text{O}_\text{E}.$$

2. Combien le problème posé admet-il de solutions ?

PROBLÈME

Partie A

Soit f une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application φ qui, à tout réel t, associe

$$\varphi(t)=\frac{1}{-2t^2-2t+1}.$$

1. Soit g l'application de l'intervalle $\text{S}=\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ +\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(u)=f\left(\frac{1+\text{tg}\,u}{2}\right).$$

Prouver que g est différentiable sur S, puis que g est une fonction affine.

2. Montrer que 1t e dt

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^1\frac{1}{-2t^2-2t+1}\,\text{d}t.$$

Partie B

On considère l'application I de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(p,\ q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

1. En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0\ ;\ 1]$, trouver la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}^\star\right) \quad u_n = I(n,\ n)$.

2. Montrer que

$$\forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star, \quad I(p+1,\ q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2,\ q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties), puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie C

1. Après avoir remarqué que

$$2t^2 - 2t + 1 = 1 - 2t(1-t),$$

simplifier

$$\frac{1}{2t^2-2t+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k.$$

2. On considère la suite v telle que $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Quelle est la limite de la suite w telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k?$$