Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Centres étrangers [1] septembre 1986 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$f(x) = (1+x)\text{e}^{-2x}.$$

On se propose dans ce problème d'utiliser une équation différentielle satisfaite par f pour donner une méthode de calcul des dérivées successives de f et d'interpréter géométriquement cette méthode.

Partie A.

1. Étudier f.En donner, dans une repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique $(\mathscr{C})$ soignée en précisant les points d'intersection avec les axes, ainsi que les tangentes en ces points [unité de longueur 2 cm].
2. Soit a un réel strictement plus grand que -1.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la droite d'équation $x = a$, l'axe des abscisses et $(\mathscr{C})$.
   Calculer en cm^2 l'aire de $\mathscr{D}$ en fonction de a.
   Montrer que cette aire a une limite quand a tend vers $+\infty$ et la calculer.

Partie B.

1. Quels doivent être les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre :
   $$(1) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$
   Démontrer alors que toutes les dérivées de f vérifient (1).
   Calculer l'ensemble des primitives de f, et chercher si une de primitives vérifie l'équation (1).
2. On pose $f^{(0)} = f$ et pour n entier naturel non nul on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
   La fonction f est une solution de l'équation différentielle :
   $$y'' + 4y' + 4y = 0.$$
   Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (c_n) et (d_n) qui vérifient pour tout n entier naturel,
   $$\left\{\begin{array}{l c l} f^{(n)} & = & c_n f' + d_n f\\ c_{n+1} & = & -4c_n + d_n\\ d_{n+1} & = & -4c_n \end{array}\right.$$

1. Djibouti, Liban, Maroc, Portugal

3. On définit deux suites $\left(\gamma_n\right)$ et (δ_n), $(n \geqslant 0)$ par les formules :

$$c_n = (-2)^n \gamma_n \quad ; \quad d_n = (-2)^n \delta_n.$$

Montrer que la suite de terme général $\delta_n - 2\gamma_n$ admet une valeur constante que l'on déterminera.
En déduire que la suite $\left(\gamma_n\right)$ est une suite arithmétique que l'on explicitera.
Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Partie C.

Soit l'application :

$$g : M(x\,;\,y) \longmapsto M'(x'\,;\,y')$$

définie analytiquement par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -4x + y \\ y' & = & -4x \end{array}\right.$$

1. Dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ soient A(1 ; 0) et B(0 ; 1).
On note $\text{A}' = g(\text{A})$.
Quelles sont les coordonnées de A′ ?
On définit une unique application affine s par les relations :

$$\begin{array}{lcl} s(\text{O}) & = & \text{O} \\ s(\text{A}) & = & \text{B} \\ s(\text{B}) & = & \text{A} \end{array}$$

Reconnaître s et donner ses éléments caractéristiques.

2. On pose $h = s \circ g$.
Démontrer que h est une application affine.
Déterminer $h(\text{O})$, $h(\text{A})$, $h(\text{B})$ et reconnaître que h est une affinité.
En déduire, à l'aide de la relation $h = s \circ g$, une construction géométrique de l'image M′ d'un point M par g.

N. B. : La partie **C** du problème est indépendante des parties **A** et **B**.