∽ Étranger [1] septembre 1962 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

Construire le graphe de

$$y = \cos x - \cos^2 x$$

dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
Déterminer l'aire du domaine fermé limité par cette courbe et l'axe $x'x$.

I

Partie A.

Dans le plan rapporté à un système orthonormé $x\text{O}y$, $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ désignent les vecteurs unitaires des axes $x'x$ et $y'y$.
On considère la transformation géométrique $T(k, h)$ qui, à tout point $\text{M}(x~;~0)$, associe le point $\text{M}'(x'~;~0)$ qui s'en déduit par une inversion de centre O, de puissance k, suivie d'une translation de vecteur directeur $h\overrightarrow{\imath}$.
On considère également la transformation géométrique $\mathcal{T}(k, h)$ qui, à tout point P du plan, associe le point P′ qui s'en déduit par l'inversion de centre O, de puissance k, suivie de la translation de vecteur directeur $h\overrightarrow{\imath}$.

1. Une transformation $T(k, h)$ étant donnée, calculer x' en fonction de x.
   Montrer que la relation

$$(1) \qquad xx' - 2x + 4 = 0.$$

   définit une transformation $T(k_0, h_0)$ et calculer les nombres k_0, h_0.

Dans toute la suite du problème, les transformations (T) et $\mathcal{T}$ dont il sera fait mention seront les transformations associées à ces deux nombres.

2. Soit P′ le transformé de P par $\mathcal{T}$. On considère le cercle (ω) de centre $\omega(0~;~1)$ et de rayon 1.
   Montrer que, si P décrit une tangente à ce cercle, P′ décrit, en général, un cercle.
   Étudier la famille des cercles associés à la famille des tangentes à (ω).
   Déterminer, en particulier, le lieu des centres de ces cercles. Préciser l'équation de ce lieu.

Partie B.

Dans cette deuxième partie, on étudie seulement la transformation (T).

1. Côte d'Ivoire, Haute-Volta, Niger, Grèce, Tunisie, Turquie

1. Calculer, en fonction de x, $Y = \overline{\text{MM}'}$ et tracer le graphe de cette fonction.

Utiliser ce graphe à la détermination de x de manière que le segment MM$'$ ait une longueur arithmétique donnée, ℓ.

Discuter l'existence et Je nombre des solutions suivant les valeurs de ℓ.

2. On considère les points fixes

$$\text{A}(0\,;\,+2) \quad \text{et} \quad \text{A}'(+2\,;\,+2).$$

Vérifier que les droites AM et A$'$M$'$ sont perpendiculaires.

Quel est le lieu de leur point d'intersection, R, quand M décrit $x'x$?

Construire le cercle de diamètre MM$'$, connaissant la longueur ℓ de son diamètre.

Discuter suivant les valeurs de ℓ.