Étranger groupe I [1] juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit un parallélépipède rectangle ; ABCD en est une face, AA′, BB′, CC′, DD′ en sont des arêtes ; on fait, successivement et dans cet ordre, les symétries orthogonales suivantes (ou retournements) :

$$S_1 \text{ d'axe AD}, \quad S_2 \text{ d'axe BB}', \quad S_3 \text{ d'axe C}'\text{D}'.$$

Le produit de ces symétries, qu'on pourra noter $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, équivaut à une transformation T, que l'on reconnaîtra et que l'on énoncera en utilisant seulement des lettres de la figure donnée.

EXERCICE 2

Le repère, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$, est orthonormé ; soit (C) la courbe représentative de la fonction définie par

$$y = \text{e}^x ;$$

(C) coupe $y'\text{O}y$ en A.
Un point $M(a\ ;\ b)$ de (C) est projeté sur $x'\text{O}x$ en P et sur $y'\text{O}y$ en Q.

1. Évaluer par différence et selon le signe de a l'aire de la région du plan que limitent les segments AQ, QM et l'arc AM de (C).
2. En déduire une fonction primitive de la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
Soit k un nombre positif donné, a la mesure d'une longueur donnée et (H) la courbe d'équation

$$y = f(x), \quad \text{avec} \quad f(x) = \sqrt{k^2x^2 + a^2}.$$

1. **a.** Reconnaître et tracer (H).
   b. Calculer l'abscisse du point, I, où la normale à (H) au point M d'abscisse λ coupe l'axe $x'\text{O}x$.
   c. Former l'équation du cercle (C_λ), de centre I, qui passe en M.
2. Le cercle (C_λ) coupe $x'\text{O}x$ en deux points, P' et pu.
   a. Former et ordonner l'équation donnant les abscisses, X' et X'', de ces points.
   b. Montrer que X' et X'' vérifient la relation suivante, indépendante de λ :
   $$(1) \quad \left(X' + X''\right)^2 = 4\left(k^2 + 1\right)\left(X'X'' + a^2\right).$$
   c. Inversement, on donne sur $x'\text{O}x$ deux points, P' et P'', dont les abscisses, X' et X'', vérifient la relation (1) ; existe-t-il un nombre λ tel que le cercle (C_λ) admette $P'P''$ pour diamètre ?
3. On suppose, dans toute la suite du problème, $X' < X''$.

1. Le Groupe 1 comprend les pays suivants : Algérie, Iles Comores, Cameroun sud, Italie, Turquie, Côte française des Somalis, Égypte, Éthiopie, Syrie, Liban, Grèce, Tunisie, Espagne et Portugal.

a. Résoudre l'équation (1) par rapport à X'', en fonction de X', et aussi par rapport à X', en fonction de X''.
On emploiera les notations Y' et Y'' pour désigner $f\left(X'\right)$ et $f\left(X''\right)$.

b. Établir les formules

$$\text{(2)} \quad Y'' + kX'' = \alpha^2\left(Y' + kX'\right),\ Y'' - kX'' = \beta^2\left(Y' - kX'\right),$$

où l'on a posé

$$\alpha = \sqrt{k^2+1} + k, \quad \beta = \sqrt{k^2+1} - k \quad (\alpha\beta = 1).$$

4. Soit T la transformation ponctuelle, définie sur $x'\text{O}x$, dans laquelle tout point, interprété. comme un point P', admet un transformé, interprété comme le point P'' associé, $P'' = T\left(P'\right)$.
On part d'un point P_0 sur $x'\text{O}x$ et l'on forme la suite des points

$$P_1 = T\left(P_0\right), \quad P_2 = T\left(P_1\right), \quad \ldots, \quad P_n = T\left(P_{n-1}\right), \ldots$$

à partir de $n = 0$. Soit X_n l'abscisse de P_n et $Y_n = f\left(X_n\right)$.

a. Calculer $Y_n + kX_n$ et $Y_n - kX_n$ en fonction de n, α et β, ainsi que des données initiales X_0 et Y_0 ; on utilisera, à cet effet, des formules de récurrence déduites des formules (2), justifiées ou non.
Calculer ensuite X_n et Y_n.

b. On suppose $X_0 = 0$ et k entier ; montrer que Y_n et $\dfrac{X_n}{2\sqrt{k^2+1}}$ sont deux multiples entiers de a.