∽ Baccalauréat C Étranger groupe 1 [1] ∾ septembre 1970

EXERCICE 1

Soit a, b, c, d et e des nombres premiers, distincts deux à deux; soit x, y et z les nombres entiers tels que l'on ait

$$x = ab^2c, \quad y = a^2bd \quad \text{et} \quad z = a^2b^2e.$$

1. On désigne par $\circ$ et par $\star$ les opérations qui consistent à prendre respectivement le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun de deux nombres.

Évaluer les résultats des opérations suivantes :

$m = y \circ z$;	$n = z \circ x$;	$p = x \circ y$;	
$q = y \star z$;	$r = z \star x$;	$s = x \star y$;	
$t = r \circ s$;	$u = x \circ q$;	$v = x \star m$;	$w = p \star n$.

Vérifier que l'on a $v = t$ et $w = u$.

2. Quelles propriétés des opérations $\circ$ et $\star$ vient-on de vérifier sur cet exemple ? (On ne demande pas de les démontrer dans le cas général.)

EXERCICE 2

Dans un plan orienté, rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, on donne les points A, B, C, D et E, par leurs coordonnées

	A	B	C	D	E
x	1	2	3	3	2
y	1	3	2	0	-1

1. Il existe une rotation de centre ω_1 qui transforme B en D, C en E' ;
une rotation de centre ω_2 qui transforme O en D, A en E ;
une rotation de centre ω_3 qui transforme O en B, A en C.
Déterminer les angles de ces rotations et les coordonnées de ω_1, ω_2 et ω_3.

2. Démontrer qu'il existe deux points F et G du plan et trois droites (D_1), (D_2) et (D_3), tels que F et G aient respectivement pour symétriques
O et A par rapport à (D_1),
B et C par rapport à (D_2),
D et E par rapport à (D_3).
Donner les coordonnées de F et de G et les équations des droites (D_1), (D_2) et (D_1).

EXERCICE 3

Une unité de longueur est choisie pour mesurer tous les segments de droites qui interviennent dans le problème.

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire.

1. Soit ABCD un trapèze convexe rectangle ; les angles en A et B sont droits ; le point M commun aux diagonales AC et BD se projette orthogonalement en H sur AB.
Démontrer la relation

$$\frac{1}{\text{MH}} = \frac{1}{\text{AD}} + \frac{1}{\text{BC}}.$$

Exprimer $y = \text{MH}$ en fonction de $x = \text{AB}$, $a = \text{AC}$ et $b = \text{BD}$.

2. Soit f la fonction qui fait correspondre, lorsque cela est possible, au réel x strictement positif, le nombre $y = \text{MH} = f(x)$.

a. Démontrer que f est une fonction décroissante de la variable x. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'axes Ox et Oy.

b. Caractériser géométriquement (C) dans le cas $a = b$.

c. On suppose : $a > b$; démontrer que
y a une limite ℓ quand x tend vers zéro,
$\dfrac{y-\ell}{x}$ a une limite quand x tend vers zéro,
y a une limite m quand x tend vers b,
$\dfrac{b-x}{y-m}$ a une limite quand x tend vers b. .
Calculer toutes ces limites.
Tracer la courbe (C).

3. **a.** Utiliser les résultats concernant la variation de f pour démontrer que l'équation d'inconnue x

$$h\left(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}\right) = \sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{b^2-x^2},$$

où h est un paramètre réel et strictement positif, a une racine strictement positive, et une seule, x_0, pourvu que l'on ait

$$h < \frac{ab}{a+b}$$

b. Calculer x_0 dans le cas où l'on a $a = b$.

c. On suppose $a > b$; démontrer que la fonction u de la variable réelle t, définie par

$$u = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{4}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right).$$

décroît de b^2 à 0 lorsque t croit de 1 à $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.
On posera alors $a^2 - b^2 = 16h^2k^2$, avec $k > 0$ et

$$x_0^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{4}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right).$$

avec

$$1 < t < \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Démontrer que l'on a alors

$$t^3 = k\left(t^4-1\right).$$

(On ne cherchera pas à résoudre cette équation, sauf dans les conditions du 4.)

4. *Application numérique* : On donne $a = 119$, $b = 70$ et $h = 30$.

a. En posant $t = \sqrt{\dfrac{7}{3}}z$, en déduire z, puis x_0.

b. Utiliser le résultat obtenu pour calculer $\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi$ et $\sin\varphi$, sachant que l'on a simultanément

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

et

$$119\cos\theta = 70 cos\varphi = 30(\text{cotg}\,\theta + \text{cotg}\,\varphi).$$