Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1981

EXERCICE 1

Calculer les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin x\,\mathrm{d}x, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 2

On sait que tout rationnel r peut être représenté, de façon unique, par une fraction irréductible ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^\star$).
Soit f l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}^\star$ définie par $f(r) = q$.

1. Montrer que 1 est une période de f.
2. a et b étant deux entiers naturels, montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a+b$ est premier avec a et avec ab.
3. On désigne par $r_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$ (p_0 et q_0 premiers entre eux) un nombre rationnel de l'intervalle $]0\,;1[$.

   Montrer qu'il existe des rationnels de la forme $\dfrac{p_0}{q}$ (p_0 et q premiers entre eux) tels que

   $$f\left(\frac{p_0}{q} + \frac{p_0}{q_0}\right) = q \cdot q_0$$

   .

   En déduire que 1 est la plus petite période de f.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

1. Étudier f et construire sa courbe représentative (Γ) dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}$, rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Démontrer que (Γ) est incluse dans une conique $\mathscr{C}$ dont on précisera les asymptotes et les sommets.

Partie B

1. Soit A, B, M, trois points de $\mathscr{E}$ de coordonnées respectives $(1\,;0)$ pour A; $(2\,;0)$ pour B; $(x\,;\,y)$ pour M.

   M se projette orthogonalement en K sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$, en H sur la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{\imath}$.

   a. Établir que si M a une abscisse différente de 2 et une ordonnée non nulle, il existe une unique application affine notée Φ_M telle que

   $$\Phi_M(M) = M, \quad \Phi_M(H) = K, \quad \Phi_M(\mathrm{B}) = \mathrm{A}.$$

b. Quelle relation doit-il exister entre les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M pour que Φ_M soit une similitude indirecte ?

2. On pose $\Gamma^\star = \Gamma \setminus \{A, B\}$ (c'est-à-dire Γ privée des points A et B).

Quelle est la nature de Φ_M quand M est un point de $\Gamma^\star$? Préciser alors les éléments géométriques et la forme réduite caractérisant Φ_M.

3. M étant un point de $\Gamma^\star$, on définit le réel k_M par

$$\left\|\overrightarrow{M\Phi_M(\mathrm{B}}\right\| = k_M \left\|\overrightarrow{M\mathrm{B}}\right\|.$$

a. x désignant l'abscisse de M, montrer que

$$k_M = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{|x - 2|}$$

b. Soit g la fonction qui à x associe k_M. Établir que g est une bijection de son ensemble de définition sur son ensemble image et qu'il n'existe aucun point M de $\Gamma^\star$ tel que Φ_M soit une isométrie.

Partie C

1. $(M,\ M') \in \Gamma^\star \times \Gamma^\star$. Quelle est la nature de $\Phi_{M'} \circ \Phi_M$?

2. Établir que pour tout point M de $\Gamma^\star$, il existe un unique point M' de $\Gamma^\star$ tel que $\Phi_{M'} \circ \Phi_M$ soit une isométrie.

Préciser le point M', et les éléments géométriques caractérisant alors l'isométrie $\Phi_{M'} \circ \Phi_M$.

Quel est l'ensemble décrit par son centre ω quand M décrit $\Gamma^\star$?