Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger groupe 1 [1] septembre 1968

EXERCICE 1

Les nombres en question sont des entiers naturels différents de 1.

1. Montrer que :

   - si deux nombres ne sont pas premiers entre eux, l'un au moins de leurs diviseurs communs est premier ;

   - si deux nombres sont premiers entre eux, tout nombre premier qui divise leur produit divise l'un et est premier avec l'autre ;

   - si deux nombres sont premiers entre eux, leur somme et leur produit sont aussi deux nombres premiers entre eux.

2. Calculer deux nombres, connaissant leur somme, 135, et leur plus petit multiple commun, 504.

EXERCICE 2

On donne dans un plan P trois points A, B et C dans P

1. Démontrer que, quel que soit le point M dans P, ou hors de P, la somme des produits scalaires $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$ est nulle.
2. Trouver dans P un point M tel que les trois produits scalaires précédents soient égaux.
   Discuter.

EXERCICE 3

On considère l'ensemble E des équations du 4$^{\text{e}}$ degré, à coefficients réels, de la forme

$$(1) \qquad f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0.$$

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Après avoir divisé $f(x)$ par x^2, poser 1

$$x + \frac{1}{x} = u$$

   et montrer que la nouvelle inconnue u est racine de l'équation :

$$(2) \qquad u^2 + 2au + b - 2 = 0.$$

   En déduire que l'équation (1) a toujours quatre racines, réelles ou non, distinctes ou non.

1. Ce groupe 1 comprend les pays suivants : Algérie, Iles Comores, Cameroun sud, Italie, Turquie, Côte française des Somalis, Égypte, Éthiopie, Syrie, Liban, Grèce, Tunisie, Espagne et Portugal.

2. **a.** En revenant à la, forme initiale,

$$(1) \qquad f(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0,$$

montrer que, si l'équation (1) a une racine complexe, non réelle, x_0, elle a aussi pour racine le nombre conjugué de x_0 et le nombre inverse dex_0.

b. En déduire qu'alors, si le module de x_0 est différent de 1, l'équation (1) a quatre racines complexes, dont on précisera la disposition des images dans le plan complexe. Une telle équation (1) sera dite du type I.

c. Déterminer a et b, sachant que l'équation (1) admet pour racine le nombre $(2+\text{i})$.

Résoudre dans ce cas l'équation (1) et mettre $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de la variable x à coefficients réels.

d. Mêmes questions qu'au c, en supposant maintenant que l'équation (1) admet pour racine le nombre

$$\rho(\cos\theta + \text{i}\sin\theta),$$

ρ et θ étant deux réels tels que

$$\rho > 1, \quad 0 < \theta < \pi.$$

3. **a.** Montrer que, si l'équation (1) a une racine complexe, non réelle, de module 1, elle a ou bien trois autres racines de module 1 (type II), ou bien deux autres racines réelles et inverses (type III).

b. Montrer que l'équation (1) peut avoir quatre racines réelles (type IV).

c. Représenter, dans le plan complexe, les images des quatre racines de l'équation (1) pour chacun des types II, III et IV.

4. **a.** À chaque élément e de E on associe le point M de coordonnées $(a\,;\,b)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé. M est appelé image de e. Discuter, suivant la position de M, le type de l'équation e.

b. L'équation (1) étant du type I, trouver l'ensemble des points M tels qu'une racine de l'équation e associée ait un module donné ρ $(\rho > 1)$.

c. L'équation (1) étant du type III, les images dans le plan complexe de ses quatre racines peuvent-elles être cocycliques ?