Baccalauréat C Étranger groupe I [1] septembre 1972

EXERCICE 1

Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathscr{E}$ de dimension trois, on désigne par $\mathscr{T}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$, non nul, par Δ un déplacement quelconque, par $\circ$ la loi de composition des transformations ponctuelles.
Démontrer qu'une condition, nécessaire et suffisante, pour que l'on ait
$\Delta = \mathscr{T} \circ \Delta \circ \mathscr{T}$, est que Δ soit un déplacement hélicoïdal d'angle π et d'axe orthogonal à $\overrightarrow{V}$.

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On note $M(z)$ le point M, image du nombre complexe z, les nombres j et j^2 étant les nombres complexes $\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}$.
Aux trois points $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ et $\mathrm{C}(c)$ on associe les nombres

$$u = a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 \quad \text{et} \quad v = a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}.$$

De même, aux trois points $\mathrm{A}'(a')$, $\mathrm{B}'(b')$ et $\mathrm{C}'(c')$ sont associés

$$u' = a' + b'\mathrm{j} + c'\mathrm{j}^2 \quad \text{et} \quad v = a' + b'\mathrm{j}^2 + c'\mathrm{j}.$$

1. Montrer que u reste invariant quand on change l'origine du repère, la base (f, i) étant conservée.
2. Montrer qu'une condition, nécessaire et suffisante, d'existence d'une similitude directe, dans laquelle A′, B′ et C′ sont respectivement les images de A, B et C, s'écrit

$$uv' - vu' = 0.$$

PROBLÈME

L'entier naturel n étant au moins égal à 1, on note g_n la fonction qui, à tout réel x strictement supérieur à n, associe

$$g_n(x) = (x-n)\mathrm{Log}\,x - x\mathrm{Log}\,(x-n),$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $(x+1)^2 < 2x^2$.
   En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'inégalité $p^2 < 2p$ est vérifiée pour toute valeur de l'entier naturel p supérieure ou égale à 5.
   Déterminer les signes de $g_n(n+1)$ et de $g_n(n+2)$ selon les valeurs de n.
2. Calculer les dérivées première et seconde, $g_n'(x)$ et $g\ (x)$, de gn(x) par rapport à la variable x. En déduire le sens de variation de $'_n$ et le signe de $g_n''(x)$, puis le sens de variation de g_n.

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire.

3. Trouver les limites de $g_n(x)$ lorsque x tend vers n et lorsque x tend vers $+\infty$.
Il pourra être commode d'écrire

$$g_n(x) = -n\text{Log}\,x - x\text{Log}\left(1 - \frac{n}{x}\right).$$

Tracer la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé.

4. Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ a une racine, et une seule, notée x_n et que $x_n - n$ tend vers 1, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
Quelle est la limite dans les mêmes conditions de $x_{n+1} - x_n$?

5. Calculer l'intégrale

$$F(a) = \int_a^{x_2} g_2(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pour } a \in]2\ ;\ x_2],$$

et trouver la limite de $F(a)$, lorsque a tend vers 2.