

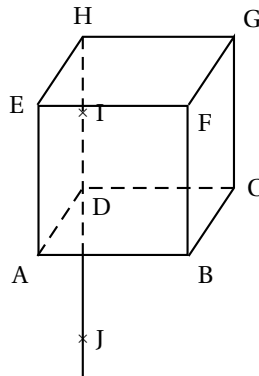
Baccalauréat C Étranger groupe I bis juin 1984

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans l'espace affine euclidien \mathcal{E} , on donne un cube ABCDEFGH. Soit I le milieu de l'arête [HD] et J le point tel que D soit le milieu du segment [JH].

1. Établir que le plan (ACI) est le plan médiateur du segment [FJ].
2. Une application affine \mathcal{A} de l'espace \mathcal{E} laisse les points A, C, I invariants et transforme F en J. Démontrer que si \mathcal{A} est unique et est une isométrie que l'on caractérisera.



EXERCICE 2

4 POINTS

On considère, dans l'ensemble \mathbb{C} , l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0.$$

1. Sachant que (E) admet une solution réelle, la déterminer puis résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} .
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les trois points dont les affixes respectives sont les trois solutions de l'équation (E) définissent un triangle : démontrer que ce triangle est rectangle et isocèle.

PROBLÈME

12 POINTS

À tout entier naturel n non nul, on associe l'application f_n ainsi définie :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 & \rightarrow 0 \\ x < 0 & \rightarrow (1+x)^n e^{(n+1)x}. \end{cases}$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur : 4 cm).

Partie A

Dans cette première partie, l'entier naturel n prend les valeurs 1 et 2.

1. Étudier la dérivabilité de f_1 et f_2 au point 0.
2. Étudier les variations de f_1 et f_2 .
3. Quel est le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 3 de la fonction exponentielle : $X \mapsto e^X$?

En effectuant le changement de variables $X = \frac{1}{nx}$, justifier la propriété, pour tout réel x strictement négatif

$$e^{\frac{1}{nx}} = 1 + \frac{1}{nx} + \frac{1}{2n^2x^2} + \frac{1}{6n^3x^3}\epsilon(x),$$

où ϵ désigne une application définie sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \epsilon = 0$.

- a. Prouver l'existence d'un unique triplet (a, b, c) et d'un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de réels tels que, sur \mathbb{R}_+^* :

$$f_1(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\epsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \epsilon_1(x) = 0.$$

$$f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \epsilon_2(x) = 0.$$

- b. En déduire l'existence d'une droite asymptote \mathcal{D}_1 pour la courbe \mathcal{C}_1 et d'une parabole asymptote Γ_2 pour la courbe \mathcal{C}_2 .
On précisera les positions relatives des courbes asymptotes.
4. Tracer dans un repère, la courbe \mathcal{C}_1 puis, dans un autre repère, les courbes \mathcal{C}_2 et Γ_2 .

Partie B

Dans cette deuxième partie, on revient au cas général.

1. Étudier la dérivabilité de f_n au point 0.
2. Étudier les variations de f_n et ébaucher la courbe représentative \mathcal{C}_n de l'application f_n suivant la parité de n .
3. Chaque courbe \mathcal{C}_n présente un sommet A_n d'abscisse $-\frac{1}{n+1}$; on note y_n l'ordonnée du point A_n .
Les suites, de terme général $\ln y_n$ et y_n , sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites.
4. On désigne par u_n l'ordonnée du point de la courbe \mathcal{C}_n d'abscisse $-\frac{1}{10}$.
 - a. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-3} près par défaut de u_1, u_2, u_3, u_4
 - b. En étudiant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, établir que la suite de terme général u_n est décroissante à partir du rang n_0 que l'on précisera.
 - c. Étudier la limite éventuelle de la suite de terme général u_n .