Baccalauréat C Étranger Groupe I bis juin 1981

EXERCICE 1

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(\text{E}) \qquad 17x - 15y = 3.$$

1. Démontrer que, pour tout couple $(x\,;\,y)$ solution de (E), x est multiple de 3.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) puis la résoudre complètement.
3. Démontrer que si $(x\,;\,y)$ est un couple solution, le plus grand commun diviseur de x et y est égal à l'un ou l'autre de deux entiers que l'on précisera. Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ solutions de (E) tels que x et y ne soient pas premiers entre eux.

EXERCICE 2

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Au point de $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x\,;\,y)$ on associe son affixe $x+\text{i}y$. On désigne par A le point d'affixe 1.

1. Déterminer, par leurs affixes b et c, deux points B et C de $\mathscr{P}$ vérifiant les deux conditions :
   a. O est barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux;
   b. $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\|$.
2. Sans refaire les calculs, indiquer par quelle transformation géométrique on passe des résultats obtenus à partir du point A, d'affixe 1, à ceux qu'on obtient à partir du point A$'$, d'affixe a complexe quelconque.

PROBLÈME

1. **a.** Étudier et représenter graphiquement (par une courbe C) la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$G(x) = \text{Log}\,\text{Log}|x|.$$

   Log désignant le logarithme népérien.

   b. Montrer que la restriction g de G à l'intervalle $\text{I} =]1\,;\,+\infty[$ admet une application réciproque que l'on notera h. Expliciter l'image par h d'un réel x.
2. À tout réel k, on associe l'ensemble E_k des applications f de I dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition :

   $$\forall x \in \text{I}, \quad f\left(x^2\right) = f(x) + k.$$

   a. Montrer que E_0 est un espace vectoriel réel.

   b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'application $g_k = \dfrac{k}{\text{Log}\,2}g$ est un élément de E_k.

   c. Montrer que, pour k donné dans $\mathbb{R}$, E_k est l'ensemble des applications de la forme $g_k + \varphi$, avec $\varphi \in E_0$. De quelle structure peut-on munir l'ensemble E_k ?
3. **a.** À toute application φ de I dans $\mathbb{R}$, on associe l'application $\psi = \varphi \circ h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (h a été définie en 1. b).

   Montrer que φ appartient à E_0 si, et seulement si, ψ admet Log 2 pour période.

   On note P l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de période Log 2.

b. Montrer que E_k est l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$\frac{k}{\text{Log}}\, g + \psi \circ g, \quad \text{avec } \psi \in \text{P}.$$

4. On note θ l'application $t \longmapsto \sin\left(\dfrac{2\pi}{\text{Log } 2}\, t\right)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on note u l'application $\theta \circ g$ de I dans $\mathbb{R}$.

a. Étudier et représenter graphiquement (courbe Γ) la restriction de u à l'intervalle $\text{J} = \left[\sqrt{\text{e}}\ ;\ \text{e}\right]$; on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des réels $x \in$ J tels que $u(x)$ appartienne à $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.

b. Vérifier que u est un élément de E_0.
Représenter graphiquement (courbe Γ') la restriction de u à l'intervalle

$$\text{J}' = \left[\text{e}^{\frac{1}{4}}\ ;\ \text{e}^{\frac{1}{2}}\right].$$

(Unité : 4 cm.)