

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Centres étrangers groupe 1¹ ∞
juin 1995

EXERCICE 1

4 points

Une entreprise utilise des machines de type M constituées chacune de deux éléments E_1 et E_2 . La défektivité d'un seul des deux éléments E_1 et E_2 suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne.

Soient A_1 et A_2 les deux évènements :

A_1 : « l'élément E_1 tombe en panne » ;

A_2 : « l'élément E_2 tombe en panne ».

On suppose que A_1 et A_2 sont deux évènements indépendants de probabilités respectives :

$$p_1 = p(A_1) = 0,08 \quad \text{et} \quad p_2 = p(A_2) = 0,05.$$

1. Calculer la probabilité s pour que les deux éléments soient simultanément hors service.
2. Calculer la probabilité p pour que la machine M soit en panne.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Vérifier que l'espérance mathématique de X est égale à 0,13.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) ; unité graphique : 2 cm.

Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement, si A_n est un point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note p_n et θ_n le module et l'argument de z_n .

1.
 - a. Déterminer les affixes des points $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$. Placer ces points sur une figure.
 - b. Calculer p_0, p_1, p_2, p_3 , ainsi que $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.
2.
 - a. Pour tout entier n , exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . En déduire z_n en fonction de n .
 - b. Établir les expressions de p_n et θ_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement ce résultat.
 - d. Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+1} .

1. Djibouti, Maroc, Tunisie

3. Établir que $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$. Après avoir exprimé $A_n A_{n+1}$ en fonction de n , déterminer en fonction de n , la longueur ℓ_n de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$. Déterminer la limite de ℓ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unité graphique : 5 cm. A, B, C désignent les points d'affixes respectives 0, i et -1 .

On note g l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z , associe le point $g(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{a + z + iz}{3}.$$

1.
 - a. À tout point M d'affixe z , on fait correspondre le point M_1 d'affixe iz . On note M' l'isobarycentre des points A, M et M_1 . Exprimer en fonction de z l'affixe de M' .
 - b. Montrer que $g(B) = O$ si et seulement si $a = 1 - i$ et que, dans ces conditions, les points O, A, I sont alignés, I désignant le milieu de [BC]. Placer les points O, A, B, C, I sur une figure.
Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 1 - i$.
2.
 - a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω , le rapport et l'angle.
 - b. Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.
3.
 - a. Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$.
Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).
 - b. Soit O' l'image de O par g . Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).
 - c. En déduire que les points I, O, O' , A sont alignés.
4. Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre [BO'].

PROBLÈME**11 points**

L'objet de la partie 1 est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unité graphique : 2 cm.

L'objet de la partie 2 est d'étudier une méthode d'approximation de l'unique solution non nulle a de l'équation $f(x) = 0$, à l'aide d'une suite.

Partie 1**Étude de la fonction f**

1. Sens de variation de f

- a. Calculer la dérivée f' de f .
 - b. Étudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.
 - c. Dédire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.
 - d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
2. Comportement asymptotique de f en $+\infty$
- a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat; on note \mathcal{P} la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.
3. Signe de f
- a. Dresser le tableau de variation de f .
 - b. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle a et une seule appartenant à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et montrer que $0,8 \leq a \leq 0,9$.
 - c. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.
4. Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes \mathcal{P} et \mathcal{C} . On précisera la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
5. a. Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (x^2 - 3)] dx$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - c. Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie 2

Approximation de la solution a de l'équation $f(x) = 0$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0,8; 0,9]$ par

$$g(x) = X - f(x) = x + 3 - x^2 - 3e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Ainsi, la solution a de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1. Étude de la fonction g'
 - a. Calculer $g'(x)$.
Étudier le sens de variation de g' (On pourra utiliser les résultats de I. 1. b.).
 - b. Calculer $g'(0,8)$ et $g'(0,9)$. En déduire qu'il existe un nombre β et un seul de l'intervalle I tel que $g'(\beta) = 0$.
Montrer que pour tout $x \in [\beta; 0,9]$, $|g'(x)| \leq 6 \cdot 10^{-2}$, puis que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{5}$.
2. Étude de la fonction g
 - a. Étudier les variation de g sur I .

- b.** Calculer $g(0,8)$ et $g(0,9)$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que

$$|g(0,9) - g(\beta)| \leq 6 \cdot 10^{-3}.$$

En déduire que $g(\beta) \in I$.

- c.** Prouver que pour tout $x \in I$, $g(x)$ appartient aussi à I .

- d.** Montrer que pour tout $x \in I$, $|g(x) - a| \leq \frac{1}{5}|x - a|$.

- 3.** Étude d'une suite d'approximation de a

Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence

$u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 0,8$.

- a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{5}|u_n - a|$.

- b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$.

- c.** En déduire la limite de la suite (u_n) .