Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers groupe 1 ∽ juin 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise utilise des machines de type M constituées chacune de deux éléments E_1 et E_2 . La défectuosité d'un seul des deux éléments E_1 et E_2 suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne.
Soient A_1 et A_2 les deux évènements :
A_1 : « l'élément E_1 tombe en panne » ;
A_2 : « l'élément E_2 tombe en panne ».
On suppose que A_1 et A_2 sont deux évènements indépendants de probabilités respectives :

$$p_1 = p(A_1) = 0,08 \quad \text{et} \quad p_2 = p(A_2) = 0,05.$$

1. Calculer la probabilité s pour que les deux éléments soient simultanément hors service.
2. Calculer la probabilité p pour que la machine M soit en panne.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Vérifier que l'espérance mathématique de X est égale à $0,13$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.
Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe 2i et A_1 le milieu du segment $\left[\text{A}_0\text{A}'_0\right]$.
Plus généralement, si A_n est un point d'affixe z_n, on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu du segment $\left[A_n A'_n\right]$. On note p_n et θ_n le module et l'argument de z_n.

1. **a.** Déterminer les affixes des points A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3. Placer ces points sur une figure.
   b. Calculer p_0, p_1, p_2, p_3, ainsi que θ_0, θ_1, θ_2, θ_3.
2. **a.** Pour tout entier n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. En déduire z_n en fonction de n.
   b. Établir les expressions de p_n et θ_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.
   d. Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+1}.
3. Établir que $\text{A}_n\text{A}_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{A}_{n-1}\text{A}_n$. Après avoir exprimé A_nA_{n+1} en fonction de n, déterminer en fonction de n, la longueur ℓ_n de la ligne brisée $\text{A}_0\text{A}_1\text{A}_2\ldots\text{A}_n$.
   Déterminer la limite de ℓ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 5 cm.

A, B, C désignent les points d'affixes respectives 0, i et -1.
On note g l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point $g(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{a + z + \mathrm{i}z}{3}.$$

1. a. À tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M_1 d'affixe iz. On note M' l'isobarycentre des points A, M et M_1. Exprimer en fonction de z l'affixe de M'.

b. Montrer que $g(B) = \mathrm{O}$ si et seulement si $a = 1 - \mathrm{i}$ et que, dans ces conditions, les points O, A, I sont alignés, I désignant le milieu de [BC]. Placer les points O, A, B, C, I sur une figure.

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 1 - \mathrm{i}$.

2. a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.

b. Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.

3. a. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right)$.

Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).

b. Soit O$'$ l'image de O par g. Montrer que la droite (OO$'$) est l'image par g de la droite (BO).

c. En déduire que les points I, O, O$'$, A sont alignés.

4. Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[\mathrm{BO}']$.

PROBLÈME **11 points**

L'objet de la partie 1 est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 3 + 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 2 cm.
L'objet de la partie 2 est d'étudier une méthode d'approximation de l'unique solution non nulle a de l'équation $f(x) = 0$, à l'aide d'une suite.

Partie 1

Étude de la fonction *f*

1. Sens de variation de f

a. Calculer la dérivée f' de f.

b. Étudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leqslant \alpha \leqslant 0,5$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Comportement asymptotique de f en $+\infty$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer le signe de $\left[f(x) - \left(x^2 - 3\right)\right]$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat ; on note $\mathscr{P}$ la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

3. Signe de f

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle a et une seule appartenant à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$ et montrer que $0,8 \leqslant a \leqslant 0,9$.

c. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

4. Tracer dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$. On précisera la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5. **a.** Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \left[f(x) - \left(x^2-3\right)\right]\,\text{d}x$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie 2

Approximation de la solution a de l'équation $f(x) = 0$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I = [0,8 ; 0,9] par

$$g(x) = X - f(x) = x + 3 - x^2 - 3\text{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

Ainsi, la solution a de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1. Étude de la fonction g'

a. Calculer $g'(x)$.
Étudier le sens de variation de g' (On pourra utiliser les résultats de I. 1. b.).

b. Calculer $g'(0,8)$ et $g'(0,9)$. En déduire qu'il existe un nombre β et un seul de l'intervalle I tel que $g'(\beta) = 0$.
Montrer que pour tout $x \in [\beta~;~0,9]$, $\left|g'(x)\right| \leqslant 6\cdot 10^{-2}$, puis que pour tout $x \in \text{I}$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{5}$.

2. Étude de la fonction g

a. Étudier les variation de g sur I.

b. Calculer $g(0,8)$ et $g(0,9)$.
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que

$$\left|g(0,9) - g(\beta)\right| \leqslant 6\cdot 10^{-3}.$$

En déduire que $g(\beta) \in \text{I}$.

c. Prouver que pour tout $x \in \text{I}$, $g(x)$ appartient aussi à I.

d. Montrer que pour tout $x \in \text{I}$, $|g(x) - a| \leqslant \dfrac{1}{5}|x - a|$.

3. Étude d'une suite d'approximation de a
Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence
$u_{n+1} = g\left(u_n\right)$ et la condition initiale $u_0 = 0,8$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{5}\,|u_n - a|$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{5^n}$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).