Baccalauréat C septembre 1981 Étranger groupe I

EXERCICE 1

E est un espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}\right)$.
f est l'application de E vers E définie par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
f\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & -\frac{1}{3}\overrightarrow{\imath}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\imath}+\frac{2}{3}\overrightarrow{k},\\
f\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \frac{2}{3}\overrightarrow{\imath}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\imath}+\frac{2}{3}\overrightarrow{k},\\
f\left(\overrightarrow{k}\right) & = & -\frac{2}{3}\overrightarrow{\imath}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\imath}-\frac{1}{3}\overrightarrow{k}.
\end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est une rotation vectorielle. Déterminer son axe.
2. Déterminer $f \circ f$. Que peut on en déduire pour f ?

EXERCICE 2

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 3^n par 7.
2. Déterminer le reste de la division par 7 du nombre A sachant que

$$A = (2\,243)^{325} + (1\,179)^{154}.$$

3. Le nombre B s'écrit en base 3 : $\overline{121010201}$.
   Déterminer le reste de la division de B par 7.

EXERCICE 3

On désigne par $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques à variable réelle continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Partie A

1. Montrer que, f étant un élément de $\mathscr{C}$, on peut associer à tout réel a strictement positif un réel, noté $F(a)$, défini par

$$F(a) = \int_a^{3a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. a décrivant $\mathbb{R}_+^\star$, on définit ainsi une fonction F de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F'(x) = \frac{f(3x) - f(x)}{x}.$$

   La fonction F est elle élément de $\mathscr{C}$?
3. Définir F dans les deux cas particuliers suivants :
   a. $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$;
   b. $f : t \longmapsto 1$.

Partie B
On étudie le cas où f est l'application $f : t \longmapsto \cos t$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette question est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1. Déterminer
   a. Le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.
   b. Le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \left|\frac{f(t)}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t}.$$

   et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad |F(x)| \leqslant \mathrm{Log}\,3.$$

3. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \mathrm{Log}\,3 - F(x) = 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

   et que

$$0 \leqslant \mathrm{Log}\,3 - F(x) \leqslant 2x^2.$$

   En déduire que F admet une limite à droite au point 0.
4. Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$m(x)\frac{\mathrm{Log}\,3 - F(x)}{x}.$$

   Étudier la- limite de m à droite au point 0.

Partie C Soit G la fonction réelle telle que

$$\begin{array}{lccc} \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, & G(x) & = & F(x) \\ & G(0) & \mathrm{Log}\,3. & \end{array}$$

1. Démontrer que G est continue sur IR+.
2. En exploitant la méthode d'intégration par parties. établir que 'Ix ER!. sin 3x - 3 sin xl 2 G(x) - „ . 3x 3x En déduire que "Ix E At. 2 IG (x)1 " - x et étudier la limite de G en + 00. f f 1
3. Démontrer que G est dérivable sur IR+ et que - 4 cos x.sin2 x Vx E IR , G'(x) x
4. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la fonction G présente un extrémum. Déterminer les intervalles sur lesquels G est Croissante. Décroissante.
5. On désigne par GI la restriction de G à l'intervalle [0, 2ft]. Donner le tableau de variation de G 1 sans préciser les valeurs des extrémums el en déduire que, sur Ji' [, G, admet un zéro. Montrer que pour tout vecteur u de E, <Pt u) est orthogonal - à 0).

2° Déterminer le noyau de <p (noté Ker (Il). Vérifier que (0) est une base de Ker <p. Déterminer l'image de <p (notée lm <pl. Montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E. 3° On pose -+ 1 -+ -+ -+ 1 "3(-2i +j +2k), -+ 1 -+ _+] "3(2*i*+2*j*+*k*).−−*Démontrerque*(1.*J*)*estunebaseorthonorméedelm* < *pet*− −−*que*(1.*J*,(0)*estunebaseorthonorméedeE*.(*Danslasuitedupeoblème*,*onnoteraPJ*′*espacelm* < *p*,*etonorienteraP*à*J*′*aidedelabaseorthonorméedirecte*(1,7).)4ř*Onnote* < *P*1*l*′*endomorphismedePdéf*
(*UEPl*,

Déterminer la matrice de <Pl dans la base (1.7). 5° Démontrer qu'il existe une projection vectorielle Q de E, - telle que, pour tout vecteur u de E. on ait : - - cp(u) cp, [Q(u)].

D) Soit " un espace affine euclidien associé à E, de repère - – orthonormé R = (0 ; i, j, Ir . on note R' le repère - – orlhonormé R' (0 ; l, J, 0). f est l'applicalion affIne de 1 dans 8, laissant le point 0 invariant, et d'endomorphisme associé <p. 9' est le plan affine de repère orthonormé direct - - (0 ; l, J). l' Déterminer f(/), image de 1 par f 2° Quel est l'ensemble !fi) des points M de 8, ayant le point 0 pour image. !fi)' étant une droite parallèle à ! !iJ, coupant fP en A, quelle est l'image de ! !lf par f