Examen de maturité 2007 – Suisse

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Soit le nombre complexe $z = \alpha + \dfrac{1}{2}\text{i},\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.

1. Déterminer en fonction de α le module et l'argument de z ainsi que de $z^n,\ n \geqslant 1$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de α la suite des nombres complexes $z,\ z^2,\ z^3,\ ...,$ $z^n,\ ...,$ représentés dans le plan de Gauss, se rapproche-elle de l'origine ? s'éloigne-t-elle de l'origine ? reste-t-elle à distance constante de l'origine ?
3. Déterminer la plus petite valeur de α strictement positive pour laquelle le nombre $z^6 \in \mathbb{R}$.

   Pour la suite de cette première partie, on pose $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer $n_0 \in N^*$ tel que pour tout $n > n_0,\ z^n$ est situé à l'intérieur du disque centré à l'origine et de rayon $r = \dfrac{1}{100}$.
5. Calculer en fonction de n le module de $z^{n+1} - z^n = z^n(z-1)$. Que représente géométriquement ce module ?
6. Démontrer que la suite des longueurs des segments $\left[z^n z^{n+1}\right]$ est une suite géométrique puis calculer la longueur de la ligne polygonale $\left[zz^2z^3...z^n\right]$ lorsque n tend vers infini.

Exercice 2

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ possèdent les propriétés suivantes :

1. La fonction $f(x)$ est solution de l'équation différentielle $2xy' - 3y = 0$.
2. La fonction $g(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'' = 2$.
3. Les courbes représentatives des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se coupent au point I(4 ; 8).
4. La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction g(x) au point I est égale à 10.

   Déterminer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 3

On donne les quatre points A(-6 ; 1 ; 2), B(-3 ; 5 ; 5), C(-2 ; -2 ; 1) et D(8 ; -1 ; 1) ainsi que la droite a : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+2t \\ y & = & -1+2t \\ z & = & 4-t \end{array}\right.$

On note π le plan (ABC), K le cylindre d'axe a et de rayon 3, et enfin α désigne le plan d'équation : $-x + 2y + 2z + 8 = 0$.

1. Écrire l'équation cartésienne du plan π.

2. Calculer l'angle formé par la droite a et le plan π.
3. Montrer que le point D appartient au cylindre K.
4. Déterminer l'équation de la sphère Σ tangente intérieurement au cylindre K en un cercle passant par le point D.
5. Montrer que le plan α contient le point D et qu'il est tangent au cylindre K.
6. Calculer les coordonnées du point I qui est l'intersection de la génératrice du cylindre K passant par D et du plan π.
7. Écrire une représentation paramétrique de la droite t contenue dans le plan π et tangente au cylindre K au point I.

Exercice 4

Une urne contient 10 boules noires et n boules rouges. L'expérience $\mathscr{E}$ consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne. On note p_1 la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différente, p_2 la probabilité d'obtenir deux boules noires et p_3 la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

1. Montrer que la probabilité p_1 peut être exprimée par $p_1 = \dfrac{20n}{n^2+19n+90}$.
2. Pour une mise de 5 francs, un joueur peut réaliser l'expérience E. Le joueur gagne 10 francs s'il obtient deux boules de couleur différente et ne gagne rien dans les autres cas.

   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

   Pour la suite du problème, on pose $n = 5$.
3. Calculer les probabilités p_1, p_2 et p_3.
4. L'expérience $\mathscr{E}$ est réalisée 4 fois (on remet dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience). Calculer la probabilité des évènements suivants.

   A : « Obtenir exactement 3 fois deux boules noires. »

   B : « Obtenir exactement 2 fois deux boules noires et 1 fois deux boules rouges. »

   C : « Exactement 3 boules rouges ont été sorties de l'urne au cours des quatre expériences. »

   D : « Obtenir exactement une fois deux boules rouges sachant qu'exactement deux expériences ont donné deux boules de couleur différente. »
5. Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathscr{E}$ pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois deux boules de couleur différente soit supérieure à $0,99$?
6. φ L'expérience $\mathscr{E}$ est réalisée 150 fois.

   Calculer une valeur approximative de la probabilité d'obtenir entre 70 et 80 fois deux boules de couleur différente (bornes comprises) en justifiant votre méthode de calcul.