Exercice 485-4

I . Les questions

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$.

Écrire S_n sous forme condensée. En déduire :

a . $S_n < 2$.

b . la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

II . Résolution

1 . Analyse

La seconde expression de S_n laisse voir la suite des entiers (numérateurs) et une suite des puissances (dénominateurs). Le fait que ces puissances soient au dénominateur dérange, mais une transformation facile permet de les faire « monter » :

$S_n = 1 \times 2^{-1} + 2 \times 2^{-2} + 3 \times 2^{-3} + \ldots + n \times 2^{-n}$ ou bien, de façon plus agréable encore,

$$S_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sous cette forme, « on reconnaît » une expression liée à une série :

$\Sigma_n(x) = x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$, elle-même plus agréable sous la forme

$$\Sigma_n(x) = x(1 + 2x^{2-1} + 3x^{3-1} + \ldots + nx^{n-1}).$$

L'expression entre parenthèses est la dérivée de $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ dont la somme est connue.

2 . Synthèse

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour x réel différent de 1, posons

$\Sigma_n(x) = x^1 + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$ et

$T_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Avec ces notations, $S_n = \Sigma_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Sigma_n(x) = xT_n(x)$.

$T_n(x)$ est la dérivée de $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ et cette somme, somme des n premiers termes de la progression géométrique de premier terme x et de raison x, vaut $x\,\frac{1 - x^n}{1 - x}$.

Sa dérivée est $T_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} + x\,\frac{-nx^{n-1}(1 - x) - (1 - x^n)(-1)}{(1 - x)^2}$ soit

$$T_n(x) = \frac{(1-x^n)(1-x)}{(1-x)^2} + x\,\frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2}$$

$$T_n(x) = \frac{1 - x - x^n + x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{-nx^n + nx^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$T_n(x) = \frac{1 - x^n - nx^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$ dont on tire

$$\Sigma_n(x) = x\,\frac{1 - x^n - nx^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$ puis

$$S_n = \Sigma_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$ soit

$$S_n = 2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$ d'où enfin

$S_n = 2 + \frac{n - 2n - 2}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Cette égalité peut également être justifiée par récurrence.

La réponse à chaque question en découle :

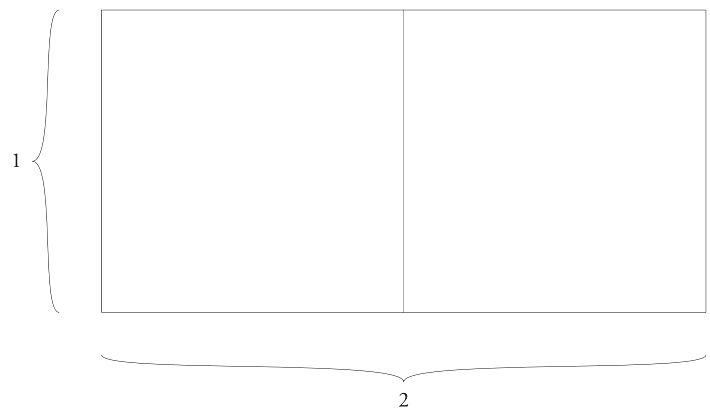
a . On a $S_n < 2$.

b . $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+2}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$.

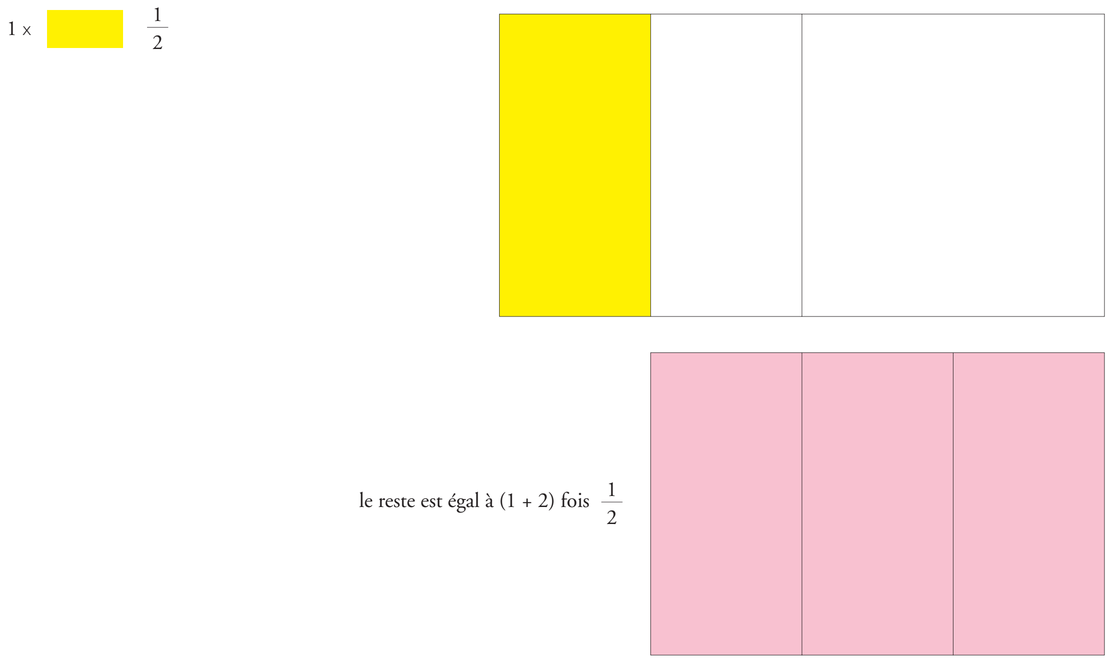
III . Illustration géométrique à l'aide d'aires

Une unité de longueur a été fixée.

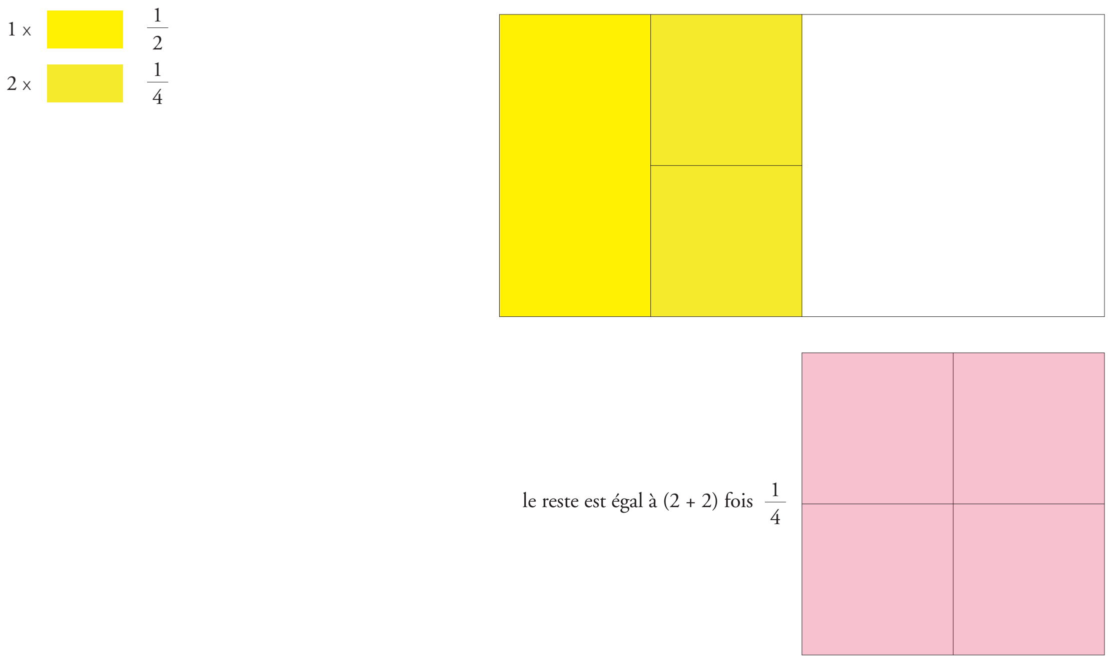
L'idée est d'utiliser pour unité d'aire celle d'un carré de côté 1. Vu ce qui précède, on suppose donc disposer de deux carrés assemblés en un rectangle de longueur 2 et de largeur 1.



$\frac{1}{2}$ est alors l'aire de la moitié d'un des deux carrés :



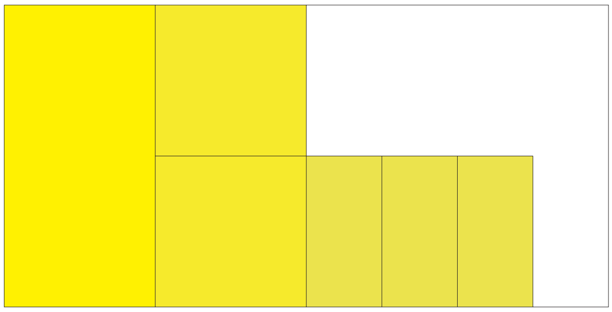
et on continue ainsi :



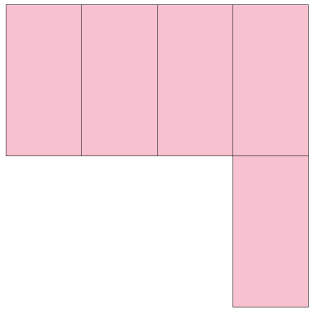
1 × $\frac{1}{2}$

2 × $\frac{1}{4}$

3 × $\frac{1}{8}$



le reste est égal à (3 + 2) fois $\frac{1}{8}$

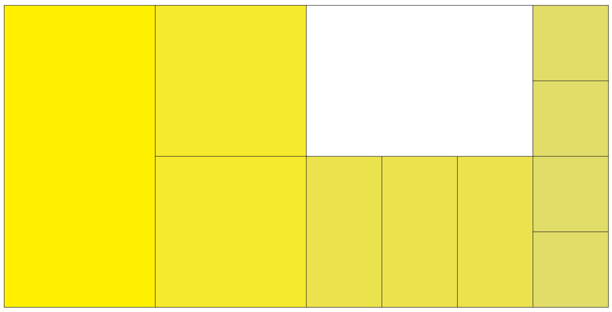


1 × $\frac{1}{2}$

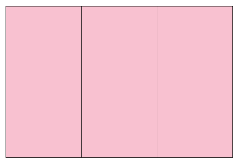
2 × $\frac{1}{4}$

3 × $\frac{1}{8}$

4 × $\frac{1}{16}$



le reste est égal à (4 + 2) fois $\frac{1}{16}$



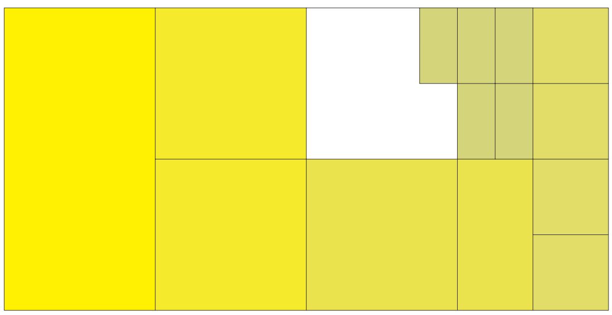
1 × $\frac{1}{2}$

2 × $\frac{1}{4}$

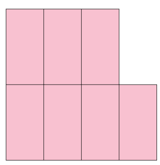
3 × $\frac{1}{8}$

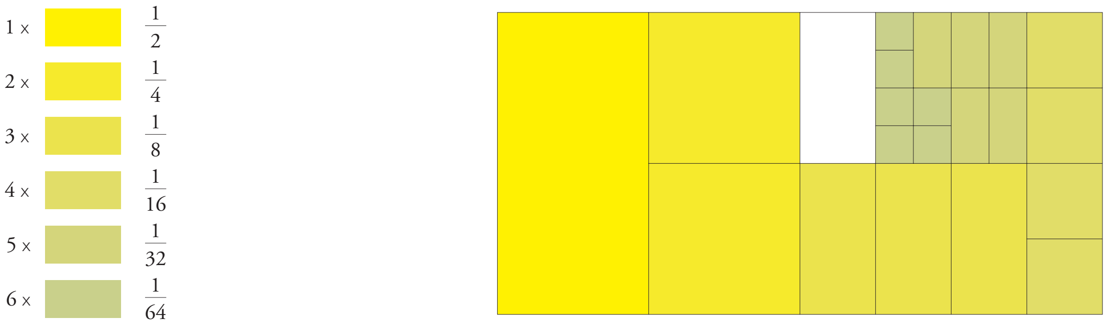
4 × $\frac{1}{16}$

5 × $\frac{1}{32}$

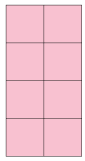


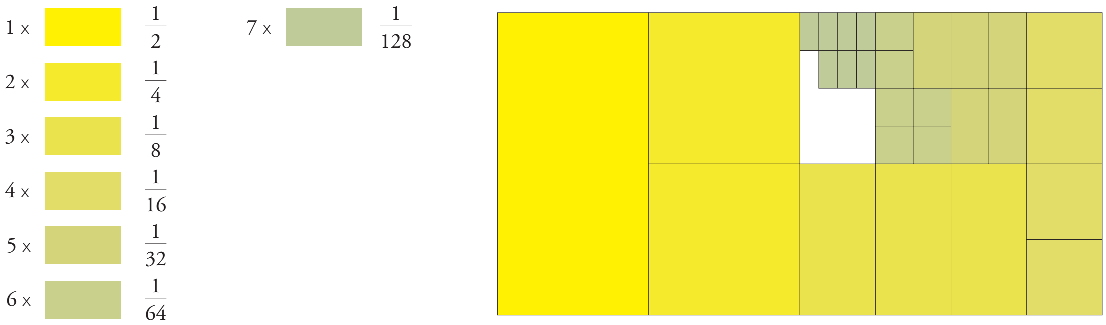
le reste est égal à (5 + 2) fois $\frac{1}{32}$



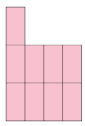


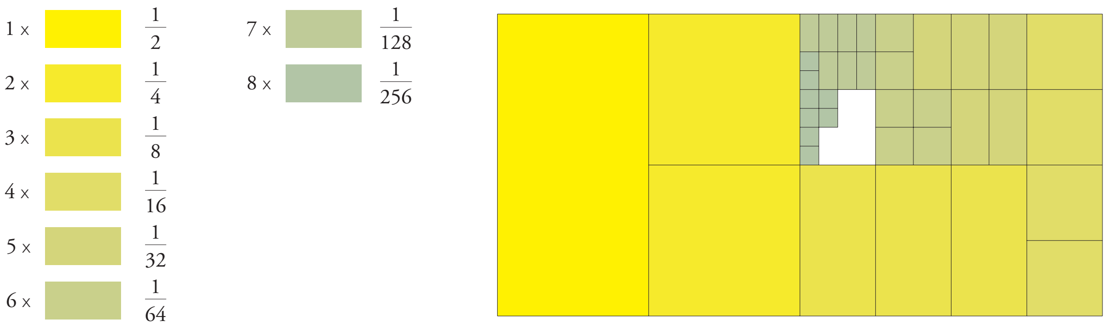
le reste est égal à (6 + 2) fois $\frac{1}{64}$



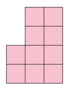


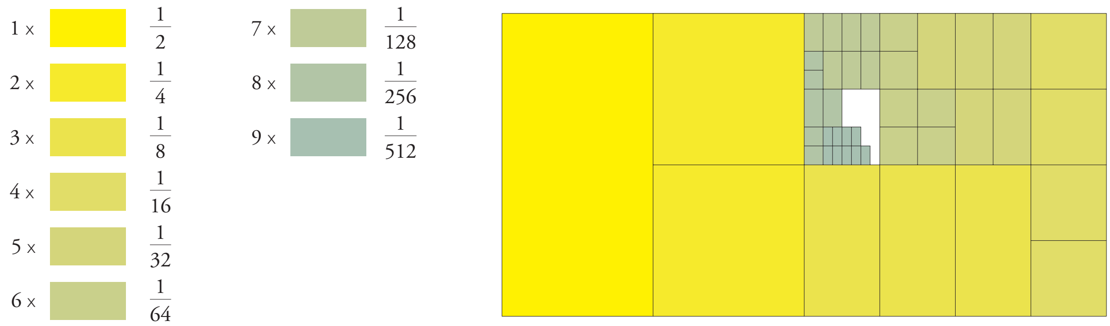
le reste est égal à (7 + 2) fois $\frac{1}{128}$

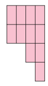


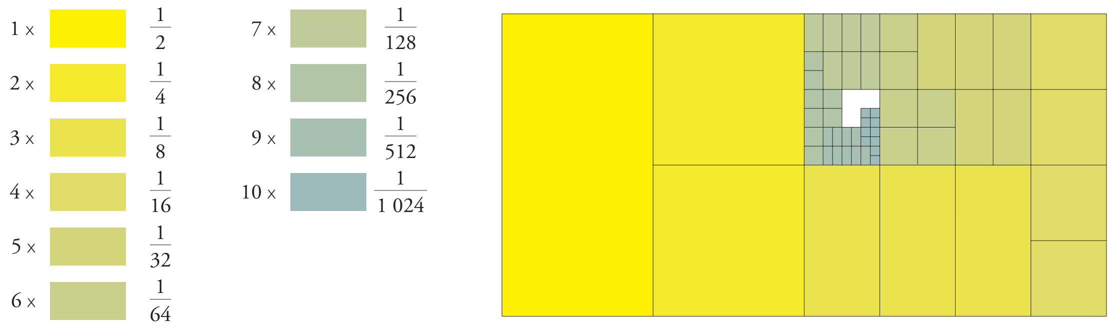


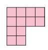
le reste est égal à (8 + 2) fois $\frac{1}{256}$

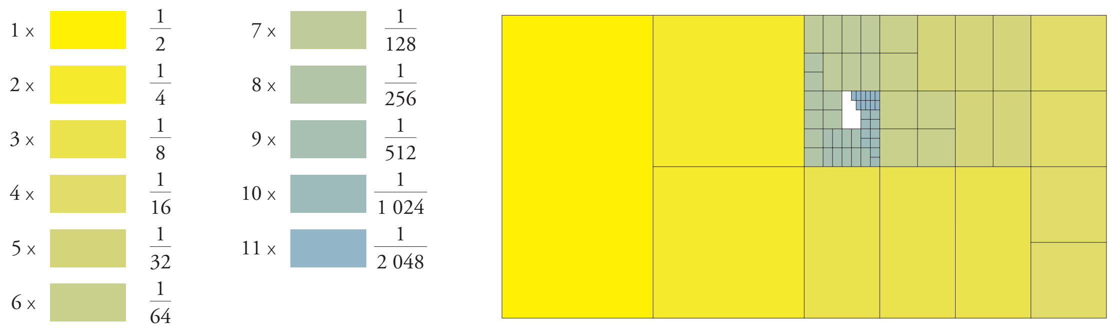


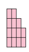


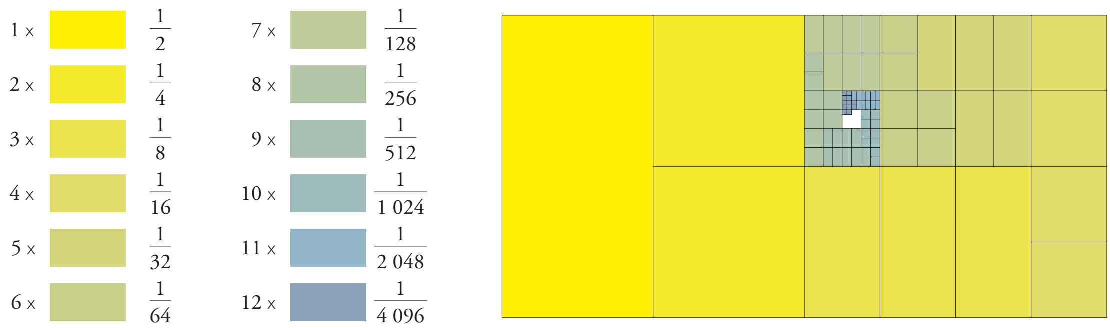
le reste est égal à (9 + 2) fois $\frac{1}{512}$ 



le reste est égal à (10 + 2) fois $\frac{1}{1\,024}$ 



le reste est égal à (11 + 2) fois $\frac{1}{2\,048}$ 



le reste est égal à (12 + 2) fois $\frac{1}{4\,096}$

On constate que l'ajout à chaque nouvelle étape est inférieur à la place disponible, que le tout tend à remplir le rectangle initial et l'on « voit » à chaque étape l'égalité $S_n + \dfrac{n+2}{2^n} = 2$.

Bien qu'il ne donne pas de démonstration, ce paragraphe, intitulé illustration géométrique, pourrait aussi bien être nommé intuition géométrique.