Exercices pour le bac S

Octobre 2003

Exercice n° 1 (enseignement obligatoire)

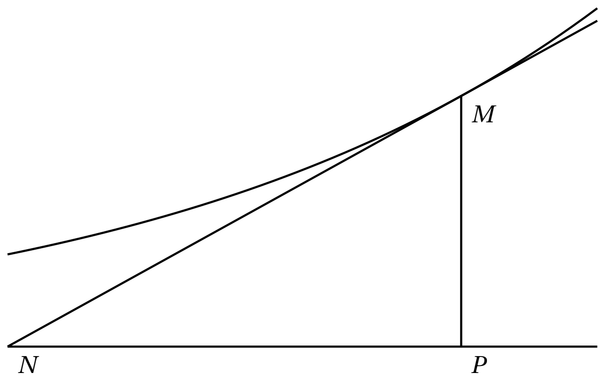
On considère 7 boules numérotées de 1 à 7.

1. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} \binom{x-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Exercice n° 2 (enseignement obligatoire)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \mapsto \text{e}^x$. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à $\mathscr{C}$, on considère le point P de coordonnées $(t\ ;\ 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   Montrer que la distance PN est constante.



2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f, on considère le point P de coordonnées $(t\ ;\ 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M àla courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.
   a. Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.
   b. Déterminer les fonctions f pour lesquelles la distance PN est constante.

Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés. Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2\text{i}$. Écrire z sous forme algébrique.

☐ $\dfrac{8}{3} - 2\text{i}$ ☐ $-\dfrac{8}{3} - 2\text{i}$ ☐ $\dfrac{8}{3} + 2\text{i}$ ☐ $-\dfrac{8}{3} + 2\text{i}$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ vérifiant $|z - 1| = |z + \text{i}|$ est la droite d'équation :

☐ $y = x - 1$ ☐ $y = -x$ ☐ $y = -x + 1$ ☐ $y = x$

3. $\left(2 + 2\text{i}\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si n s'écrit sous la forme (où $k \in \mathbb{N}$) :

☐ $3k + 1$ ☐ $3k + 2$ ☐ $3k$ ☐ $6k$

4. Soit l'équation (E) : $z = \dfrac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est :

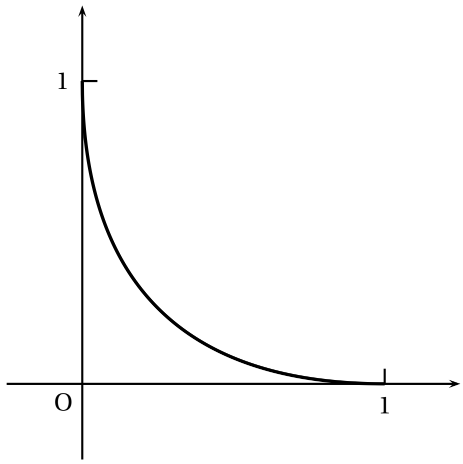
☐ $-2 - \text{i}\sqrt{2}$ ☐ $2 + \text{i}\sqrt{2}$ ☐ $1 - \text{i}$ ☐ $-1 - \text{i}$

5. Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}$ et $z_{\text{B}} = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'affixe z_{C} du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec
$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ est :

☐ $-\text{i}$ ☐ 2i ☐ $\sqrt{3} + \text{i}$ ☐ $\sqrt{3} + 2\text{i}$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ vérifiant
$\arg\left(\dfrac{z + 2}{z - 2\text{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :
☐ La droite d'équation $y = -x$
☐ Le cercle de centre $\text{I}(1 + \text{i})$ et de rayon $\text{R} = \sqrt{2}$
☐ La droite d'équation $y = x$
☐ Le cercle de diamètre [AB], A et B étant les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -2$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$.

Exercice n° 4 (enseignement obligatoire)



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Cette fonction est dérivable sur $[0;\ 1]$ et sa dérivée f' vérifie $f'(1) = 0$. La courbe représentative Γ de la fonction f dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.

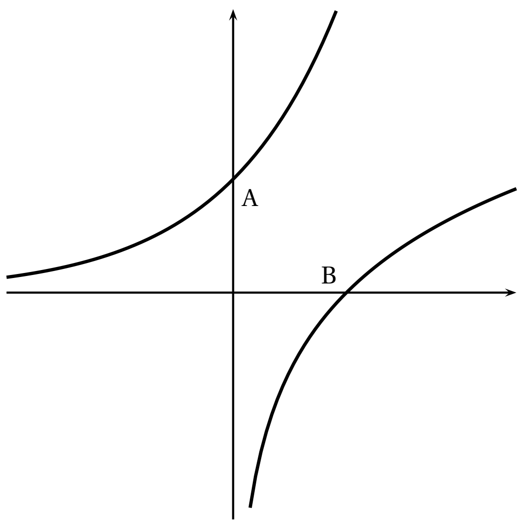
1. **a.** Montrer que le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient à Γ si et seulement si $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

   b. Montrer que Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. **a.** Si Γ était un arc de cercle, quel serait son centre ? Quel serait son rayon ?

   b. La courbe Γ est-elle un arc de cercle ?

Exercice n° 5 (enseignement obligatoire)



Le plan est rapporté un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note Φ et Γ les courbes représentatives respectives des fonctions exponentielle et logarithme népérien.
Soit A le point de Φ d'abscisse 0 et B le point de Γ d'abscisse 1.

1. **a.** Écrire les équations de la tangente D la courbe Φ au point A et de la tangente Δ la courbe Γ au point B.

   b. Montrer que les droites Δ et Γ sont parallèles.
   Quelle est leur distance ?

2. **a.** Démontrer que la courbe Φ est située entièrement « au-dessus » de D.

   b. Démontrer que la courbe Γ est située entièrement « au-dessous » de A.

   c. On désigne par M un point quelconque de Φ et par N un point quelconque de Γ. Expliquer pourquoi $MN \geqslant \sqrt{2}$.

Exercice n° 6 (enseignement obligatoire)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1x + 1,6$$

1. Faites apparaître sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leqslant x \leqslant 4$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$.
   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   a. Sur les variations de la fonction f ?
   b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1 \geqslant 0$ (on pourra poser $X = e^{x}$).
   b. Étudier les variations de la fonction f.
   c. Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05 ; 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

Exercice n° 7 (enseignement obligatoire)

NB : Les quatre propositions peuvent être examinées indépendamment les unes des autres.

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier dans chaque cas.

1. La suite (v_n) est bornée par 0 et 1.
2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
3. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice n$^{\text{o}}$ 8 (enseignement obligatoire)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle sans justification.

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.

Le candidat peut décider de ne pas répondre certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée 0.

L'espace est rapporté un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :

a. l'ensemble vide **b.** un plan **c.** une sphère

2. On considère les points A(0 ; 1 ; −2) et B(2; 1; 0).
Les coordonnées du barycentre G de (A ; 1) et (B; 3) sont :

a. G(6 ; 4 ; −2) **b.** G(1,5 ; 1 ; −0,5) **c.** G(0,5; 1; 1,5)

3. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 - t$; $y = 3t$; $z = -3$, $t \in \mathbb{R}$.
On considère les points A(2 ; 3 ; −3), B(2 ; 0 ; −3) et C(0; 6; 0). On a :

a. $d = (\text{AB})$ **b.** $d = (\text{BC})$ **c.** $d \neq (\text{AB})$ et $d \neq (\text{BC})$ et $d \neq (\text{CA})$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives :
$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 1-t \quad t \in R \\ z &=& 1+t, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t' \\ y &=& 2-1,5t' \quad t' \in R \\ z &=& 3+t', \end{array}\right.$ admettent comme point commun :

a. I(3; 0; 2) **b.** J(2; 1; 1) **c.** K(0 ; 2 ; −3)

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :
$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ y &=& 1+2t \quad t \in R, \\ z &=& 1+t, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3-2t' \\ y &=& 7-4t' \quad t' \in R \\ z &=& 2-t', \end{array}\right.$ sont :

a. parallèles **b.** sécantes **c.** non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t$; $y = 1+3t$; $z = 2+2t$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

a. orthogonaux **b.** parallèles **c.** ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

a. l'ensemble vide **b.** une droite **c.** un plan

Exercice n° 9 (enseignement obligatoire)

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$.
   En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée 10^{-3} près.
2. On considère l'équation (E) $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.
   a. Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.
   b. Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
   c. Donner une valeur approchée, 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.

Exercice n° 10 (spécialité)

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 *à* 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, **en justifiant le choix effectué.**

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, les entiers $a+b$ et $a-b$ sont nécessairement premiers entre eux.
5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont nécessairement premiers entre eux.

Exercice n° 11 (enseignement obligatoire)

L'espace est rapporté un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Déterminer une équation du plan P passant par le point A$(1\,;0\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2. Soit P' le plan d'équation $x+2y-z+1=0$ et M le point de coordonnées $(0\,;1\,;1)$.
   a. Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.
   b. Calculer les distances d et d' du point M aux plans P et P' respectivement.
3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection des plans P et P'.
   b. Déterminer les coordonnées du point H de D tel que la droite (MH) soit perpendiculaire la droite D.
   c. Vérifier que $\text{M}H^2 = d^2 + d'^2$.

Exercice n° 12 (enseignement obligatoire)

Le plan est rapporté un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$.

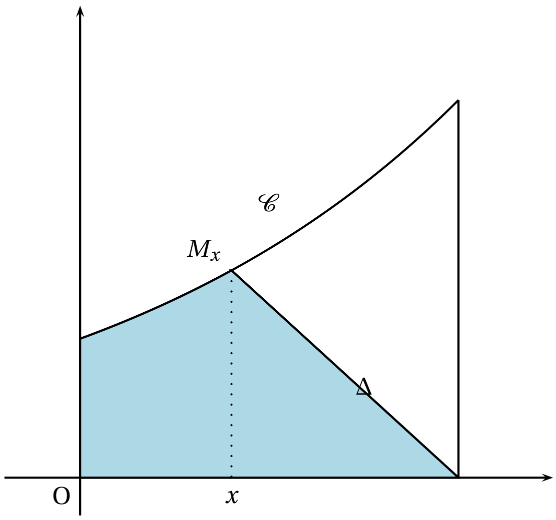
Soient f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \text{e}^{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On note Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant $[0;1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment $[\mathrm{I}A]$ partage Δ en deux régions de même aire.

Pour tout x appartenant $[0;1]$ on note M_x le point de coordonnées $\left(x,\ f(x)\right)$ et T_x le domaine délimité par la droite $\mathrm{I}M_x$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$.

On désigne par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Pour x appartenant l'intervalle $[0, 1]$, calculer $g(x)$ en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0;1]$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0;1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal la moitié de l'aire de Δ.
4. Trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

Exercice n° 13 (enseignement obligatoire)

Le plan est rapporté un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

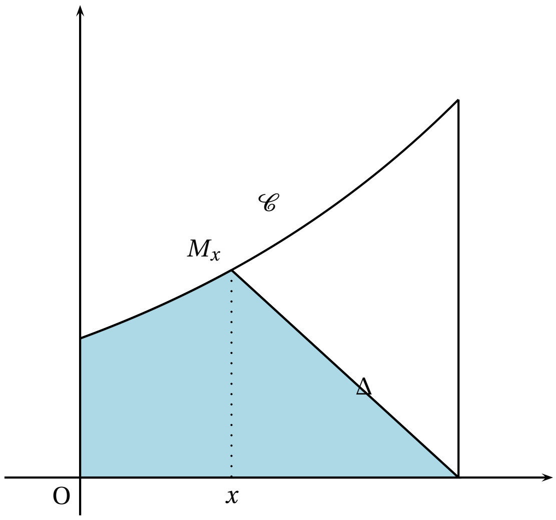
On note I le point de coordonnées (1 ; 0).

Soient f une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur $[0; 1]$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant $[0; 1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment $[\mathrm{I}A]$ partage Δ en deux régions de même aire.

Pour tout x appartenant $[0; 1]$ on note M_x le point de coordonnées $\left(x, f(x)\right)$ et T_x le domaine délimité par la droite $\mathrm{I}M_x$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$.

On désigne par F la fonction définie sur $[0; 1]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Exprimer, pour tout x appartenant l'intervalle $[0; 1]$, $g(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.
2. **Démonstration de cours** Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f.
3. Étudier les variations de la fonction $g : x \longmapsto g(x)$ sur $[0; 1]$.
4. **a.** Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   b. Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0; 1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal la moitié de l'aire de Δ.

Exercice n° 14 (enseignement obligatoire)

A. Solutions d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathscr{A}) \qquad y' = -10y + 6$$

où y désigne une fonction de la variable t, dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Démonstration de cours** Démontrer l'existence et l'unicité de la solution f de l'équation différentielle $(\mathscr{A})$ telle $f(0) = 0$.
2. Vérifier que la solution f de l'équation différentielle $(\mathscr{A})$ telle que $f(0) = 0$ est $f \quad : \quad \dfrac{3}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-10t}\right)$.

B. Établissement d'un courant dans une bobine

Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, la date $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts). L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i. Ë la date $t = 0$ l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle :

$$Li' + Ri = E$$

Valeurs numériques : Dans toute la suite, on prend $R = 5,\ L = \dfrac{1}{2},\ E = 3$.

1. Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t \geqslant 0$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} i(t)$.

Exercice n° 15 (enseignement obligatoire)

Soit I l'intervalle $[0\,;\,1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient I.
2. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}.$$

   Montrer que, pour tout n, u_n appartient I.
   On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode :

1. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
2. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
   Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?
3. Établir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_{n+4}}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Prouver que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième méthode :

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

1. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.
2. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.
4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice n° 16 (enseignement obligatoire)

Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,0\,;\,0),\quad B(-1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0) \text{ et } C(-1\,;\,\sqrt{3}\,;0)$$

1. Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.
3. **a.** Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.
   b. Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C.
   c. En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $\left(O\,;\,\vec{k}\right)$.
4. Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre ABCD soit régulier et calculer ses coordonnées.
5. Soit M un point quelconque du segment [CD]. On pose $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CD}$ avec $\lambda \in [0\,;\,1]$.
   a. Montrer que $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.
   On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation

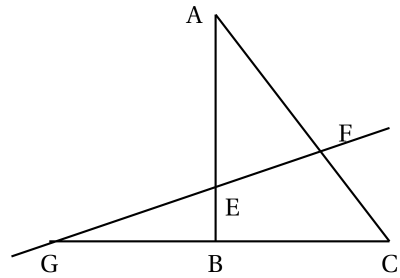
$$f(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$$

   b. Étudier les variations de la fonction f.
   c. En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.
   d. Quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice n^{o} 17 (spécialité)

PARTIE I

Soit ABC un triangle rectangle en B, direct : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit E un point du segment [AB]. Par le point E on mène une droite d qui coupe le segment [AC] en un point F et la droite (BC) en un point G (voir figure ci-contre).
Les points E, F, G sont distincts des sommets A, B, C.



Le cercle Γ circonscrit au triangle ABC et le cercle Γ' circonscrit au triangle BEG se coupent en deux points distincts B et K.

1. Justifier l'existence d'une similitude plane directe S telle que $S(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $S(\mathrm{E}) = \mathrm{G}$.
   Déterminer l'angle de S.
2. Soit Ω le centre de S.
   a. Montrer que Ω appartient aux cercles Γ et Γ'.
   b. Prouver que Ω est différent de B.
   c. Que peut-on en déduire pour Ω ?

PARTIE II

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Les affixes respectives des points A, B, C, E, F et G sont données par :

$$z_{\mathrm{A}} = 2+4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = -1-2\mathrm{i}, z_{\mathrm{C}} = 3-4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{E}} = 0,\ z_{\mathrm{F}} = \frac{5}{2},\ z_{\mathrm{G}} = -5.$$

On admettra que le point F est le point d'intersection du segment [AC] et de la droite (GE) et que les conditions de la **partie I** sont vérifiées.

1. Placer ces points sur une figure et, l'aide des résultats de la partie I, construire le point Ω, centre de la similitude S.
2. Soit S' la similitude plane directe telle que $S'(\mathrm{A}) = \mathrm{E}$ et $S'(\mathrm{C}) = \mathrm{G}$. Déterminer l'écriture complexe de S' et déterminer l'affixe du centre Ω' de S'.
3. Montrer que les points Ω et Ω' sont confondus.

Exercice n° 18 (enseignement obligatoire)

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}$).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.

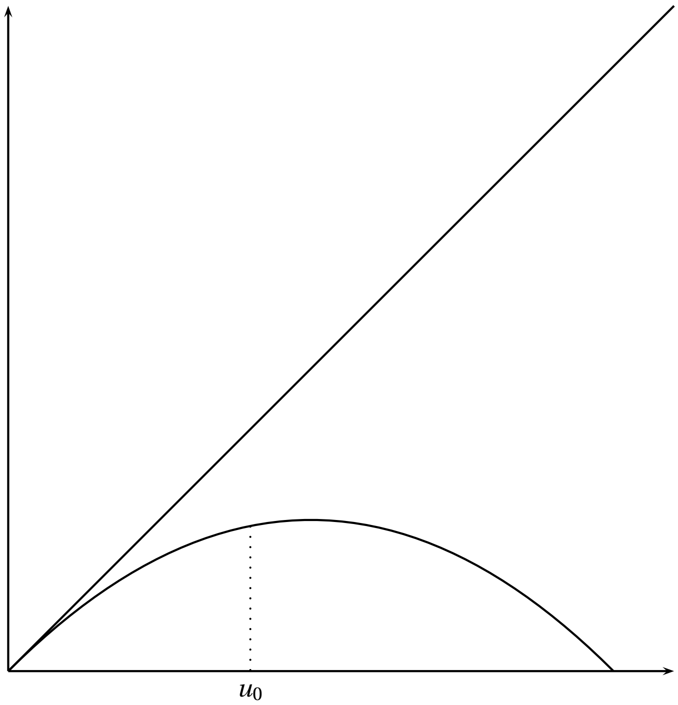
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

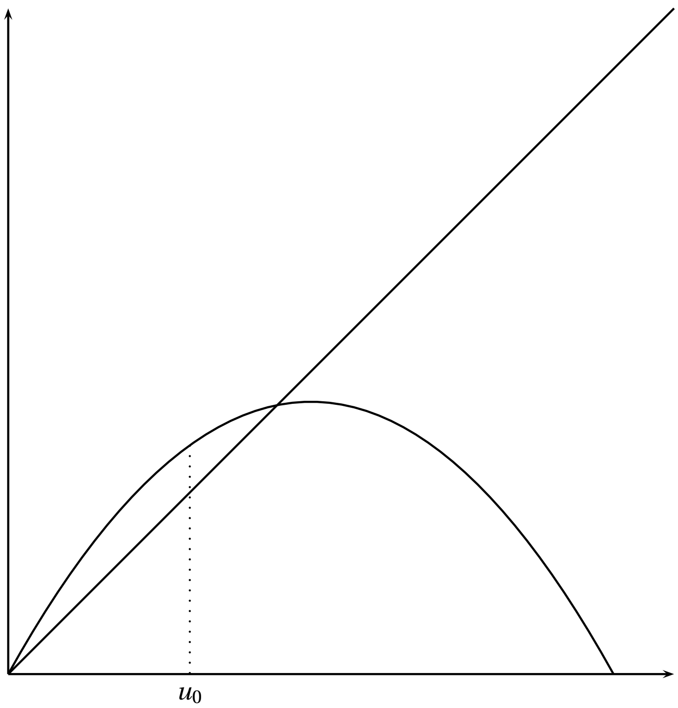
1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.
2. Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.
   a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
3. Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur $[0~;~1]$ et montrer que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \in \left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$.
   b. En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
      — montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$
      — établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   d. Que peut-on dire de l'évolution long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.
   Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en **1.** et **2.** en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, u_2, ...
   En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Feuilles annexes

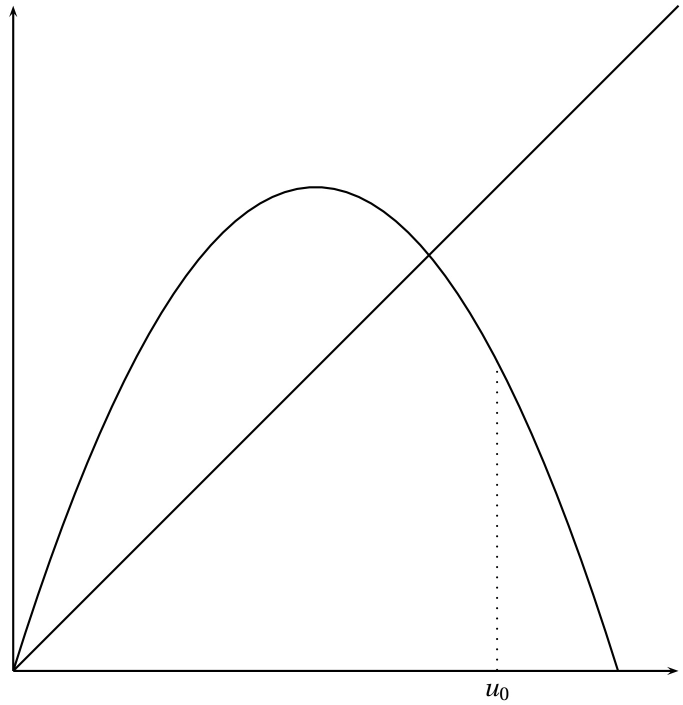
1$^{\text{er}}$ cas : $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.



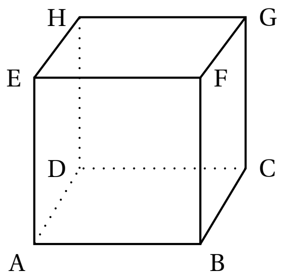
2$^{\text{e}}$ cas : $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.



3^{e} cas : $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.



Exercice n° 19 (enseignement obligatoire)



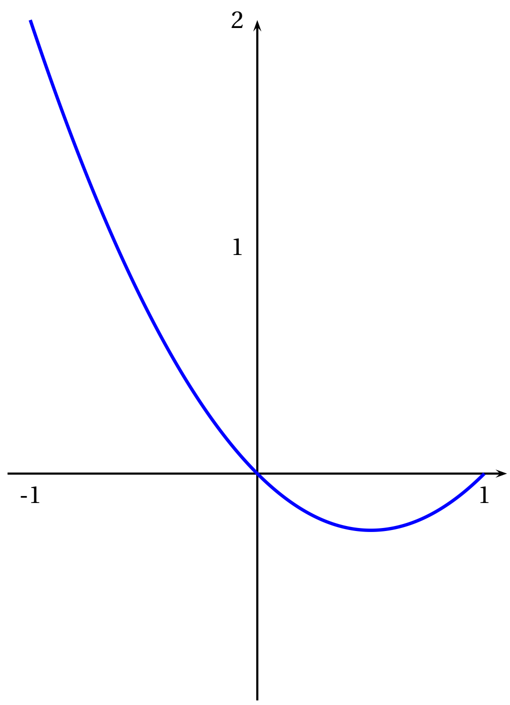
Soit ABCDEFGH un cube de côté 1. On choisit le repère orthonormal $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.
On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [BC], [CD], [DH], [HE], [EF] et [FB].

1. Déterminer les coordonnées des points I, K, M.
2. Montrer que les six points I, J, K, L, M et N sont coplanaires, dans un plan que l'on notera $\mathscr{P}$ (on donnera une équation du plan $\mathscr{P}$ dans le repère choisi).
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
4. Montrer que les projetés orthogonaux des points I, J, K, L, M et N sur la droite (AG) sont confondus en un même point. On appellera T ce point.
   Déterminer la position du point T sur le segment [AG].
5. Montrer que IJKLMN est un hexagone inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon, et que tous ses côtés ont même longueur.
6. On considère la pyramide ayant pour base cet hexagone et pour sommet le point G.
   Quelle fraction du volume du cube représente le volume de cette pyramide ?

Exercice n° 20 (enseignement obligatoire)

Les questions sont indépendantes. II est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

1. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données.
   On donnera l'expression de $f(x)$.
   a. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{x} + c$, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.
   b. f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
   c. f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2\,;\,2]$ est 0.
2. Soit g une fonction définie et dérivable, de dérivée g' continue sur $[-1\,;\,1]$. La courbe représentative de g est donnée ci-dessous.



Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma :

a. $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

b. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{2}$?

Exercice n° 21 (enseignement obligatoire)

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions posées sont indépendantes.

Pour chaque question il y a deux conclusions correctes. Le candidat doit cocher **au plus deux cases** (celles qu'il juge correctes). Aucune justification n'est demandée.

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Chaque réponse exacte rapporte la moitié des points affectés ; chaque réponse fausse enlève le quart des points affectés. Cocher trois cases ou plus à une question, ou n'en cocher qu'une, rapporte zéro point cette question.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené zéro.

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $(u_n) \leqslant (v_n) \leqslant (w_n)$ ».

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :
   ☐ La suite (w_n) tend vers $-\infty$
   ☐ la suite (u_n) est majorée
   ☐ la suite (u_n) tend vers $-\infty$
   ☐ la suite (w_n) n'a pas de limite.
2. Si $(u_n) \geqslant 1$, $(w_n) = 2(u_n)$ et $\lim (u_n) = l$, alors
   ☐ $\lim (v_n) = l$
   ☐ La suite (w_n) tend vers $+\infty$
   ☐ $\lim(w_n - u_n) = l$
   ☐ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
3. Si $\lim (u_n) = -2$ et $\lim (w_n) = 2$, alors :
   ☐ La suite (v_n) est majorée
   ☐ $\lim (v_n) = 0$
   ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite
   ☐ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :
   ☐ $\lim (w_n) = 0$
   ☐ $\lim (v_n) = 2$
   ☐ $\lim (u_n) = 2$
   ☐ la suite (v_n) n'a pas de limite.

Exercice n° 22 (enseignement obligatoire)

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans le plan rapporté un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\Big)$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathscr{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Interpréter géométriquement u_n.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

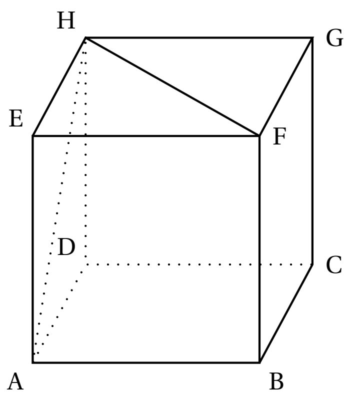
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Démontrer que F est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de F.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel t positif : $t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.
   b. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$:
   $$F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
   c. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x appartenant à $[1\,;\,+\infty[$:
   $$\int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = 3\mathrm{e} - (x+3)\mathrm{e}^{1-x}.$$
   d. En déduire que pour tout x appartenant à $[1\,;\,+\infty[$: $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.
3. On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n l'aide d'une intégrale.
   Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice n^o^ 23 (enseignement obligatoire)

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur a (a réel strictement positif).

Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).



1. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
   On admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.
3. En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).
4. **a.** Justifier les résultats suivants : les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).
   b. En déduire que la droite (AF) est orthogonale à la droite (HI).
   c. Établir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).
5. Que représente le point I pour le triangle AFH ?

Exercice n° 24 (enseignement obligatoire)

L'espace est rapporté un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

$$A(-1\,;\,0\,;\,1) \quad B(1\,;\,4\,;\,-1) \quad C(3\,;\,-4\,;\,-3) \quad S(4\,;\,0\,;\,4)$$

1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. **a.** Démontrer que O est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.
   b. En déduire que O est situé dans le triangle ABC.
4. Calculer le volume V du tétraèdre SABC.

Exercice n° 25 (enseignement obligatoire)

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant la condition

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{pour tout } x \in [0\,;\,+\infty[,\ f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

Partie A

On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1).

La méthode d'EULER permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction f. On choisit le pas $h = 0,1$.

On admet que les coordonnées $\left(x_n,\ y_n\right)$ des points M_n obtenus en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 &=& 0 \\ y_0 &=& 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} &=& x_n + 0,1 \\ y_{n+1} &=& y_n + \dfrac{0,1}{y_n} \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

Calculer les coordonnées des points $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5$ (on arrondira au millième les valeurs trouvées).

Partie B

On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant (1) est nécessairement strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$.
   En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;\,a]$.
3. Conclure.

Partie C

Existence et unicité de la fonction f.

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.
2. En déduire que si f est telle que,

$$\text{pour tout} \quad x \in [0, +\infty[,\ f(x)f'(x) = 1,$$

   alors il existe une constante C telle que :

$$\text{pour tout} \quad x \in [0, +\infty[,\ \left[f(x)\right]^2 = 2x + C.$$

3. On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour x réel positif.
4. En déduire les valeurs arrondies au millième de $f(0,1)$, $f(0,2)$, $f(0,3)$, $f(0,4)$, $f(0,5)$, puis les comparer avec les valeurs obtenues par la méthode d'EULER.

Exercice n^o 26 (spécialité)

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. **a.** Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.

   b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26y_0 = 4$.

   c. Déterminer tous les couples $(a,\ k)$ d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\phi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

   On décide de coder un message, en procédant comme suit :

   À chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre O et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

   Pour chaque lettre a du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\phi(n)$. La lettre a est alors codée par la lettre associée $\phi(n)$.

   On ne connaît pas les entiers a et b mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

   a. Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\left\{\begin{array}{lcll} 5a+b & \equiv & 10 & \text{modulo } 26\\ 19a+b & \equiv & 14 & \text{modulo } 26\end{array}\right.$

   b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

   c. Déterminer tous les couples d'entiers $(a,\ b)$, avec $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$, tels que
   $\left\{\begin{array}{lcll} 5a+b & \equiv & 10 & \text{modulo } 26\\ 19a+b & \equiv & 14 & \text{modulo } 26\end{array}\right.$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

   a. Coder le message « GAUSS ».

   b. Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\phi(n) = \phi(p)$, alors $17(n-p) \equiv 0 \quad \text{modulo } 26$.

   En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

   a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\phi(n) + 9 - n$ par 26.

   b. En déduire un procédé de décodage.

   c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

Exercice n° 27 (enseignement obligatoire)

Un quincaillier achète des ampoules trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1. On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note D l'évènement « l'ampoule est défectueuse », F_1 l'évènement « l'ampoule provient du premier fournisseur », F_2 l'évènement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur » et F_3 l'évènement « l'ampoule provient du troisième fournisseur ».

  a. Calculer la probabilité de l'évènement D, notée $P(\mathrm{D})$.

  b. Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}_1)$ qu'elle provienne du premier fournisseur ?
  Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de $P_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}_1)$.

2. On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.
On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
On donnera une valeur approchée 10^{-3} près de R.

3. La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{50\,000} = 2.10^{-5}$.
Selon cette loi, pour tout x de $[0,\ +\infty[$, $P(T \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

  a. Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ?
  Donner la valeur exacte de P_1.

  b. Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ?
  Donner la valeur exacte de P_2.

  c. Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3.

Exercice n° 28 (enseignement obligatoire)

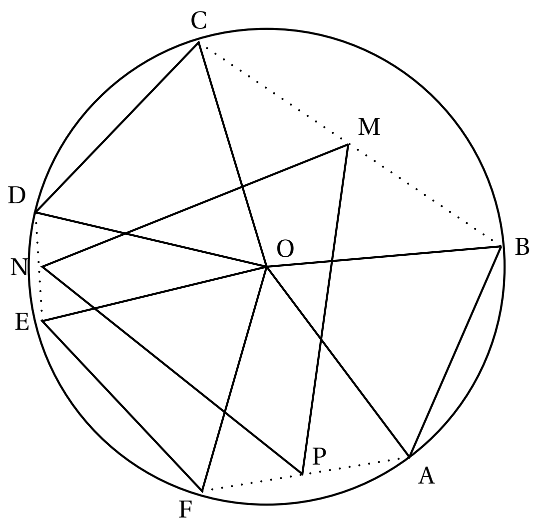
PREMIÈRE PARTIE

On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes de j :
   a. $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. $j^3 = 1$.
   c. $1 + j + j^2 = 0$.
   d. $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$.
2. Dans un repère orthonormal direct du plan, on considère les points M, N, P d'affixes respectives m, n, p.
   a. Montrer que, si le triangle MNP est équilatéral direct, alors
   $m - n = -j^2(p - n)$.
   b. Établir la propriété suivante :
   Le triangle MNP est équilatéral direct si, et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$.

DEUXIÈME PARTIE

On considère un cercle du plan de centre O et des points A, B, C, D, E, F de ce cercle tels que les angles $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$, $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}\right)$ aient la même mesure $\frac{\pi}{3}$. Soit M, N, P et N les milieux respectifs des cordes [BC], [DE], [FA]. Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct.



Exercice n° 29 (spécialité)

Des nombres étranges !

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; ... sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1. Ainsi $\mathrm{N}_1 = 1$; $\mathrm{N}_2 = 11$; $\mathrm{N}_3 = 111$; $\cdots$.

1. Citer deux nombres premiers inférieurs 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit.
   Justifier brièvement la réponse.
2. À quelle condition sur k le nombre 3 apparat-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.
3. Pour $k \geqslant 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{i=k-1} 10^i = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{k-1}$.
   Justifier l'égalité : $9N_k = 10k - 1$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour k entier compris entre 1 et 8.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7 :	3	2	6	4	5	1	3	2

   Soit k un entier ($k \geqslant 1$). Démontrer que ;

$$« \ 10^k \equiv 1 \quad (7) \ » \text{ équivaut } « \ k \text{ est multiple de } 6 \ ».$$

   En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

Exercice n^o^ 30 (spécialité)

Des nombres étranges !

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; ... sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent les mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $\mathrm{N}_1 = 1$; $\mathrm{N}_2 = 11$; $\mathrm{N}_3 = 111$; $\cdots$.

1. Citer deux nombres premiers inférieurs 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit.
   Justifier brièvement la réponse.
2. Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3, N_4 et N_5.
3. Soit n un entier strictement supérieur 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.
   a. Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.
   b. Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme $10m+1$ ou $10m-1$
   c. En déduire que $n^2 \equiv 1 \quad (20)$.
4. **a.** Soit $k \geqslant 2$. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ?
   b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.

Exercice n° 31 (enseignement obligatoire)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On étudie le tétraèdre OABC, où les points A, B et C sont définis par leurs coordonnées : A(0 ; 0 ; 2), B$\left(\sqrt{3}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$ et C$\left(\sqrt{3}\ ;\ -1\ ;\ 0\right)$.

Partie A. Géométrie analytique dans un tétraèdre

1. **a.** Faire une figure représentant le repère et le tétraèdre.
   b. Déterminer la nature géométrique et calculer les dimensions de chacune des faces du tétraèdre.
2. On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\left(2\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{3}\right)$.
   a. Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).

Partie B. Étude d'une section plane

Soit J le milieu de l'arête [BC]. Le point N est un point mobile du segment [OJ]. On appelle (P) le plan passant par le point N et orthogonal à la droite (OJ).

1. On pose $t = \text{O}N$. Vérifier que t appartient l'intervalle $\left[0\ ;\ \sqrt{3}\right]$.
2. On se propose de déterminer la nature de la section plane du tétraèdre OABC par le plan (P). Le plan (P) coupe :
   — l'arête [OC] au point R ;
   — l'arête [AC] au point S ;
   — l'arête [AB] au point T ;
   — l'arête [OBI au point U.
   a. Démontrer que les droites (ST), (BC) et (RU) sont parallèles. Démontrer que les droites (RS), (OA) et (TU) sont parallèles.
   b. Démontrer que le quadrilatère $RSTU$ est un rectangle.
   c. Déterminer avec soin les dimensions du rectangle $RSTU$ en fonction du nombre réel t (on précisera en particulier les différents triangles dans lesquels sont menés les calculs).
3. **a.** Soit $S(t)$ l'aire de la section plane définie la question **B. 2.**
   Démontrer que $S(t) = \dfrac{4}{3}t\left(\sqrt{3} - t\right)$.
   b. Étudier les variations de la fonction S, définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \sqrt{3}\right]$ par $S(t)$.
   c. Pour quelle valeur du nombre réel t l'aire $S(t)$ est-elle maximale ?
   Quelle est alors la nature géométrique particulière de la section plane étudiée ?
4. **a.** On rappelle que le volume V du tétraèdre OABC est égal à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} S(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer V par cette méthode.
   b. Calculer V en utilisant l'aire d'une face et la hauteur correspondante du tétraèdre.
   c. Vérifier la cohérence des deux résultats.