Quel est le nombre premier

qui apparaît le plus souvent

comme le k-ième facteur premier d’un entier ?

Pourquoi le nombre **23** qui est le neuvième nombre premier est le nombre qui apparaît le plus souvent comme le cinquième facteur d’un entier ?

2ème PARTIE

PLAN

INTRODUCTION

AU SUJET DES NOTATIONS

On note que p_i est le *i*-ème NP dans la suite des NP à compter de 2

$$(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, \ \ldots)$$

Quelle est la probabilité que 2 apparaisse comme 1er facteur ?

Un nombre entier a une chance sur deux d'être pair

Donc la probabilité de présence de 2 est 1 / 2

On écrira : $\lambda_1 (p_1) = \frac{1}{2}$ ou $\lambda_1 (2) = \frac{1}{2}$

On lira **« la probabilité de présence de 2 dans le 1er facteur est $\frac{1}{2}$ »**

Plus généralement :

La probabilité de présence (ou probabilité d'apparition) du nombre premier p_i dans le *k*-ième facteur d'un entier se note :

$$\lambda_k (p_i)$$

Nous nous proposons de montrer qu'il est possible de calculer la probabilité de présence d'un nombre premier donné dans le *k*-ième facteur d'un entier.

Par exemple : On sait que $p_3 = 5$

On peut calculer sa probabilité de présence dans le 2ème facteur :

$$\lambda_2 (5) = \frac{1}{10}$$

Rappels

Tout entier naturel (noté N) peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs premiers écrits dans l'ordre croissant.

$$N = (p_1)^{\alpha} \times (p_2)^{\beta} \times (p_3)^{\gamma} \times \ldots \times (p_i)^{\iota} \times \ldots$$

Par exemple:

$$4\,701\,664 = 2^2 \times 3^3 \times 11 \times 19^2 \times 37$$

Dans ce cas, 2 est le 1er facteur, 3 le 2ème, etc … et 37 le 5ème.

Notons que les exposants (non nuls) α, β, γ, … des différents nombres premiers n'interviennent pas dans la suite de cet article.

On rappelle que la suite des nombres premiers (NP) commence par :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, …

Il y a une infinité d'entiers et, par suite, une infinité de factorisations.

Est-il possible de calculer la probabilité que le k-ième facteur premier d'un entier soit un NP donné ?

Dans le livre « Ces nombres qui nous fascinent », J. M. KONINCK donne les propriétés de milliers de nombres entiers et, si nous nous intéressons au nombre 23 par exemple, nous lisons : 23 est « ***le nombre premier qui apparaît le plus souvent comme cinquième facteur d'un entier*** » ce qui ne manque pas de nous surprendre sachant que 23 est le 9ème NP !

Nous allons tenter d'éclaircir et de préciser la « probabilité d'apparition » d'un NP dans un des facteurs premiers de N (le 1er, le 2ème, …, le k-ième).

Nous nous proposons de calculer la « probabilité de présence » (ou « probabilité d'apparition ») d'un NP p_i dans le k-ième facteur d'un entier N ($k \leq i$).

Nous allons considérer les NP dans leur ordre d'apparition dans la suite des entiers naturels.

$i = 1,\ p_1 = 2$

<u>Quelle est la probabilité de présence du NP 2 dans le 1^er^ facteur ?</u>

Autrement dit, pour parler clairement : quelle est la chance qu'un nombre « tiré au hasard » soit pair ?
Réponse évidente : 1/2
.

On écrit donc

$$\boxed{\lambda_1(2) = \frac{1}{2}}$$

et, si $k \geq 2$, alors $\boxed{\lambda_k(2) = 0}$

<u>Notons que le NP 2 est le seul NP pour lequel la probabilité de présence est égale à la probabilité d'absence</u>. En effet : $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.

Pour tout NP p_i , $i > 1$,
la probabilité de présence est inférieure à la probabilité d'absence.

$$\frac{1}{p_i} < 1 - \frac{1}{p_i} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p_i} < \frac{p_i - 1}{p_i}$$

$i = 2,\ p_2 = 3$ **3 est le 2^ème^ NP, donc il a 2 positions possibles**

Si 3 est le 1^er^ facteur du nombre N, cela revient à dire que les 2 conditions :
- N est divisible par 3
- N est impair

sont vérifiées.

Donc :
$$\lambda_1(3) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda_1(3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \quad ===> \quad \boxed{\lambda_1(3) = \frac{1}{6}}$$

Si 3 est le 2^ème^ facteur du nombre N, cela revient à dire que les 2 conditions :
- N est pair
- N est divisible par 3

sont vérifiées.

Donc :
$$\lambda_2(3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \quad ===> \quad \boxed{\lambda_2(3) = \frac{1}{6}}$$

Remarques

1/ On constate **l'équiprobabilité de présence du NP 3 pour les deux premiers** facteurs.

2/ On vérifie que **la somme des 2 probabilités est égale à la probabilité de trouver un multiple de 3 dans l'ensemble des entiers** :

$$\lambda_1(3) + \lambda_2(3) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

Propriétés générales

1/ $$\boxed{\lambda_k(p_i) = 0 \text{ si } k > i}$$

2/ **La somme des probabilités que le NP p_i soit le k-ième facteur d'un nombre est égal à l'inverse de p_i.**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{i} \lambda_k(p_i) = \frac{1}{p_i}}$$

$i = 3,\ p_3 = 5$

5 est le 3ème NP. Par conséquent, il a 3 positions possibles :

a/ 5 est le premier facteur de N si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- N est divisible par 5,
- N est impair,
- N non divisible par 3.

On en déduit :

$$\lambda_1(5) = \frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$\lambda_1(5) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} \qquad ===> \boxed{\lambda_1(5) = \frac{1}{15}}$$

b/ 5 est le deuxième facteur de N si :

- N est divisible par 5,

(b1) - N est pair,

- N non divisible par 3.

Ou bien si :

- N est divisible par 5,

(b2) - N divisible par 3,

- N est impair.

$\lambda_2(5)$ est donc la somme de 2 termes (le 1^er^ se déduit de (b1) et le 2^ème^ de(b2)) :

$$\lambda_2(5) = \left[\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\lambda_2(5) = \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda_2(5) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \qquad \text{===>} \quad \boxed{\lambda_2(5) = \frac{1}{10}}$$

c/ 5 est le troisième facteur premier si, et seulement si, 2 et 3 sont 1^er^ et 2^ème^ facteurs. On en déduit :

$$\lambda_3(5) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \qquad \text{===>} \quad \boxed{\lambda_3(5) = \frac{1}{30}}$$

<u>Propriété générale</u>

Pour que le NP p_i soit le i-ème facteur premier dans la décomposition de N, il faut et il suffit que tous les NP inférieurs à p_i soient présents.

Donc :

$$\lambda_i(p_i) = \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{p_j}$$

<u>Vérification</u> :

On vérifie que : $\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(p_3) = \frac{1}{p_3}$

En effet :

$$\lambda_1(5) + \lambda_2(5) + \lambda_3(5) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$$

<u>Remarque</u>

Nous avons calculé 3 probabilités correspondant aux 3 positions (ou distributions) possibles du NP 5 mais, en fait, nous avons envisagé 4 « situations » (1 pour a/, 2 pour b/ et 1 pour c/).

Si nous récapitulons le nombre de « situations » des 3 premiers NP, nous avons :

- 1 situation pour le NP 2
- 2 situations pour le NP 3
- 4 situations pour le NP 5

En anticipant : 8 situations pour le NP 7. ?

i =4, $p_4 = 7$

7 est le 4ème NP. Par conséquent, il a 4 positions possibles :

a/ 7 est le premier facteur de N si les 4 conditions suivantes sont vérifiées :
N divisible par 7, N impair, N non divisible par 3, N non divisible par 5.
On en déduit :

$$\lambda_1(7) = \frac{1}{7}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$\lambda_1(7) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} \quad ===> \quad \boxed{\lambda_1(7) = \frac{4}{105}}$$

b/ 7 est le second facteur de N si N est divisible par 7 (évident) et si l'un des 3 NP inférieurs à 7 est premier facteur. Donc :

- si 2 et 7 présents, nous avons le terme :

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{1}{7}\times\frac{4}{15}$$

- si 3 et 7 présents, nous avons le terme :

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5} = \frac{1}{7}\times\frac{2}{15}$$

- si 5 et 7 présents, nous avons le terme :

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{7}\times\frac{1}{15}$$

$\lambda_2(7)$ est la somme des 3 termes :

$$\lambda_2(7) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{7}{15} \quad ====> \quad \boxed{\lambda_2(7) = \frac{1}{15}}$$

c/ 7 est le troisième facteur de N si N est divisible par 7 (évident) et si deux des 3 NP inférieurs à 7 sont les deux premiers facteurs. Donc :

- si 2,3 et 7 présents, nous avons le terme :

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{1}{7}\times\frac{2}{15}$$

- si 2,5 et 7 présents, nous avons le terme :

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{7}\times\frac{1}{15}$$

- si 3,5 et 7 présents, nous avons le terme :

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{7}\times\frac{1}{30}$$

Donc $\lambda_3(7)$ est la somme des 3 termes :

$$\lambda_3(7) = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}\right) = \frac{1}{7}\times\frac{7}{30} \quad ====> \quad \boxed{\lambda_3(7) = \frac{1}{30}}$$

d/ 7 est le quatrième facteur premier si, et seulement si, les NP 2, 3 et 5 sont les 3 premiers facteurs. On en déduit :

$$\lambda_4(7) = \frac{1}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5} \quad ===> \quad \boxed{\lambda_4(7) = \frac{1}{210}}$$

<u>Remarque</u>

Nous avons précédemment calculé que : $\lambda_3(5) = \frac{1}{30}$

Or $\lambda_3(7) = \frac{1}{30}$

Par conséquent, **il y a autant de chances que le troisième facteur soit 7 que 5**

$$\lambda_3(5) = \lambda_3(7) = \frac{1}{30} = 0{,}033\ 333\ \ldots$$

<u>Vérification</u>

On vérifie que : $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k(p_4) = \frac{1}{p_4}$

En effet :

$$\lambda_1(7) + \lambda_2(7) + \lambda_3(7) + \lambda_4(7) = \frac{4}{105} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

<u>Nombre de « situations » pour le NP 7</u>

7 est le 4ème NP, il a donc 4 positions possibles mais nous avons déterminé :

1 « situation » dans le cas où 7 est 1er facteur
3 ---------------------------- où 7 est 2ème facteur
3 ---------------------------- où 7 est 3ème facteur
1 ---------------------------- où 7 est 4ème facteur

Au total, nous avons bien : 1 + 3 + 3 + 1 = 8 situations pour $p_4 = 7$

On remarque que :

$$8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

On peut généraliser :

Le nombre de situations possibles pour un NP p_i est égal à 2^{i-1}

En fait, le nombre de situations est la somme des termes d'une ligne du triangle de PASCAL :

1	= 1 = 2^0
1 + 1	= 2 = 2^1
1 + 2 + 1	= 4 = 2^2
1 + 3 + 3 + 1	= 8 = 2^3

$i = 5,\ p_5 = 11$

11 est le 5ème NP. Par conséquent, il a 5 positions possibles et 16 situations.
(1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16)

a/ Dans le cas où 11 est le 1er facteur, les 4 autres NP sont absents

les calculs donnent : $\lambda_1(11) = \frac{1}{11} \times \frac{8}{35}$ ==> $\boxed{\lambda_1(11) = \frac{8}{385}}$

b/ 11 est le 2ème facteur si l'un des 4 autres NP est le 1er facteur.

Il y a 4 situations possibles ($C_4^1 = \frac{4!}{1! \times (4-1)!}$) et 4 termes pour calculer $\lambda_2(11)$

$$\lambda_2(11) = \frac{1}{11} \times \left(\frac{8}{35} + \frac{4}{35} + \frac{2}{35} + \frac{4}{105} \right) \quad ====> \quad \lambda_2(11) = \frac{1}{11} \times \frac{46}{105}$$

$$\boxed{\lambda_2(11) = \frac{46}{1155}}$$

c/ 11 est le 3ème facteur si deux des 4 autres NP occupent les 2 premiers facteurs.

$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Donc, on a 6 « situations possibles » et, par suite, 6 termes pour calculer $\lambda_3(11)$:

$$\lambda_3(11) = \frac{1}{11} \times \left[\frac{4}{35} + \frac{2}{35} + \frac{4}{105} + \frac{1}{35} + \frac{2}{105} + \frac{1}{105} \right] = \frac{1}{11} \times \frac{28}{105}$$

$$\boxed{\lambda_3(11) = \frac{4}{165}}$$

d/ 11 est le 4ème facteur si trois des 4 autres NP occupent les 3 premiers facteurs

$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$. Nous avons donc 4 situations possibles.

$$\lambda_4(11) = \frac{1}{11} \times \left[\frac{1}{210} + \frac{1}{105} + \frac{2}{105} + \frac{1}{35} \right] = \frac{1}{11} \times \frac{13}{210}$$

$$\boxed{\lambda_4(11) = \frac{13}{2310}}$$

e/ 11 est le 5ème facteur si, et seulement si, les 4 autres NP occupent les premiers facteurs. On en déduit :

$$\lambda_5(11) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{11} * \frac{1}{210} \quad ====> \quad \boxed{\lambda_5(11) = \frac{1}{2310}}$$

<u>Vérification</u> :

On vérifie que : $\sum_{k=1}^{5} \lambda_k(p_5) = \frac{1}{p_5}$

En effet : $\lambda_1(11) + \lambda_2(11) + \lambda_3(11) + \lambda_4(11) + \lambda_5(11)$

$$= \frac{8}{385} + \frac{46}{1155} + \frac{4}{165} + \frac{13}{2310} + \frac{1}{2310} = \frac{210}{2310} = \frac{1}{11}$$

i =6, p_6 = 13

13 est le 6ème NP. Par conséquent, il a 6 positions possibles et 32 situations (1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32)

1 dans le cas où 13 est 1er facteur et les calculs donnent $\lambda_1(13) = \frac{1}{13} \times \frac{16}{77} = \frac{16}{1001}$

5 dans le cas où 13 est 2ème facteur et les calculs donnent $\lambda_2(13) = \frac{1}{13} \times \frac{44}{105} = \frac{44}{1365}$

10 dans le cas où 13 est 3ème facteur et les calculs donnent $\lambda_3(13) = \frac{1}{13} \times \frac{326}{1155} = \frac{326}{15015}$

10 dans le cas où 13 est 4ème facteur et les calculs donnent $\lambda_4(13) = \frac{1}{13} \times \frac{31}{385} = \frac{31}{5005}$

5 dans le cas où 13 est 5ème facteur et les calculs donnent $\lambda_5(13) = \frac{1}{13} \times \frac{23}{2310} = \frac{23}{30030}$

1 dans le cas où 13 est 6ème facteur et les calculs donnent $\lambda_6(13) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{2310} = \frac{1}{30030}$

Vérification On vérifie que : $\sum_{k=1}^{6} \lambda_k(p_6) = \frac{1}{p_6}$

En effet $\lambda_1(6) + \lambda_2(6) + \lambda_3(6) + \lambda_4(6) + \lambda_5(6) + \lambda_6(6)$

$$= \frac{1}{13} \times \left[\frac{16}{77} + \frac{44}{105} + \frac{326}{1155} + \frac{31}{385} + \frac{23}{2310} + \frac{1}{2310}\right]$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{2310}{2310} = \frac{1}{13}$$

Remarque

La probabilité que les NP 2,3 et 5 apparaissent dans le 4ème facteur d'un nombre est nulle. Nous pouvons écrire : $\lambda_4(2) = \lambda_4(3) = \lambda_4(5) = 0$.

A compter du NP 7, la probabilité d'apparition, dans le 4ème facteur, d'un NP supérieur à 5 n'est pas nulle.

Nous l'avons déterminé pour les NP 7, 11 et 13 :

Pour le NP 7, 4ème NP dans l'ordre des NP, $\lambda_4(7) = \dfrac{1}{210} = 0{,}004\,761\,904\ldots$

Pour le NP 11, 5ème NP dans l'ordre des NP, $\lambda_4(11) = \dfrac{13}{2310} = 0{,}005\,627\,705\ldots$

Pour le NP 13, 6ème NP dans l'ordre des NP, $\lambda_4(13) = \dfrac{31}{5005} = 0{,}006\,193\,806\ldots$

On constate que $\lambda_4(7) < \lambda_4(11) < \lambda_4(13)$

Par conséquent **il est un peu plus probable de voir apparaître 13 comme 4ème facteur d'un nombre que 11 ou 7.**

Il faut attendre le calcul de $\lambda_4(17)$ et le comparer avec $\lambda_4(13)$ pour savoir si 13 est le NP qui apparaît le plus souvent comme quatrième facteur d'un nombre.

On peut dresser un premier tableau qui récapitule les résultats concernant la probabilité de présence (ou d'apparition) d'un NP (de rang i) dans le k-ième facteur d'un entier.

Tableau récapitulatif des $\lambda_k\ (p_i)$ pour $k \leq 6$ et $i \leq 6$

k ➔ / p_i ▼	1errang	2èmerang	3èmerang	4èmerang	5èmerang	6èmerang
2 *i* = 1	1/2 0,500 000 …	0	0	0	0	0
3 *i* = 2	1/6 0,166 166 …	1/6 0,166 166 …	0	0	0	0
5 *i* = 3	1/15 0,066 666 …	1/10 0,100 000 …	1/30 0,033 333 …	0	0	0
7 *i* = 4	4/105 0,038 095 …	1/15 0,066 666 …	1/30 0,033 333 …	1/210 0,004 761 …	0	0
11 *i* = 5	8/385 0,020 779 …	46/1155 0,039 826 …	4/165 0,024 242 …	13/2310 0,005 627 …	1/2310 0,000 432 …	0
13 *i* = 6	16/1001 0,015 984 …	44/1365 0,032 234 …	326/15015 0,021 711 …	31/5005 0,006 380 …	23/30030 0,000 765 …	1/30030 0,000 033 …
17 *i* = 7						

……………..	Dans les cases colorées en jaune, la probabilité d'apparition du NP (correspondant à la ligne) est le maximum de toute la colonne
……………..	La case colorée en rose signifie que la probabilité d'apparition du NP 13 dans le 4ème facteur est supérieure* aux probabilité d'apparition des NP 7 et 11

* on doit attendre le calcul de $\lambda_4(17)$ pour déterminer si $\lambda_4(13)$ constitue un maximum ou non.

Classement des probabilités d'apparition des NP selon le rang des facteurs

	1er facteur	2ème facteur	3ème facteur	4ème facteur	5ème facteur	6ème facteur
2	1er					
3	2ème	1er				
5	3ème	2ème	1er			
7	4ème	3ème	1er	3ème ?		
11	5ème	4ème	3ème	2ème ?	?	
13	6ème	5ème	4ème	1er ?	?	?

$i = 7, \; p_7 = 17$

17 est le 7ème NP. Par conséquent, il a 7 positions possibles.et 64 situations (1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64)

Les calculs donnent les résultats suivants :

$$\lambda_1(17) = \frac{1}{17} \times \frac{192}{1001} \text{ ou } \lambda_1(17) = \frac{192}{17017} = 0{,}011\ 282 \ldots$$

$$\lambda_2(17) = \frac{1}{17} \times \frac{288}{715} \text{ ou } \lambda_2(17) = \frac{288}{12155} = 0{,}023\ 693 \ldots$$

$$\lambda_3(17) = \frac{1}{17} \times \frac{628}{2145} \text{ ou } \lambda_3(17) = \frac{628}{36465} = 0{,}017\ 221 \ldots$$

$$\lambda_4(17) = \frac{1}{17} \times \frac{206}{2145} \text{ ou } \lambda_4(17) = \frac{206}{36465} = 0{,}005\ 649 \ldots$$

$$\lambda_5(17) = \frac{1}{17} \times \frac{1}{65} \text{ ou } \lambda_5(17) = \frac{1}{1105} = 0{,}000\ 904 \ldots$$

$$\lambda_6(17) = \frac{1}{17} \times \frac{1}{858} \text{ ou } \lambda_6(17) = \frac{1}{14586} = 0{,}000\ 068 \ldots$$

$$\lambda_7(17) = \frac{1}{17} \times \frac{1}{30030} \text{ ou } \lambda_7(17) = \frac{1}{510510} = 0{,}000\ 001 \ldots$$

(= 0,000 001 958 …)

Vérification

On vérifie que : $\sum_{k=1}^{7} \lambda_k(p_7) = \frac{1}{p_7}$

En effet $\lambda_1(17) + \lambda_2(17) + \lambda_3(17) + \lambda_4(17) + \lambda_5(17) + \lambda_6(17) + \lambda_7(17)$

$$= \frac{1}{17} \times \left[\frac{192}{1001} + \frac{288}{715} + \frac{628}{2145} + \frac{206}{2145} + \frac{1}{65} + \frac{1}{858} + \frac{1}{30030} \right]$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{30030}{30030} = \frac{1}{13}$$

Remarque

On a déterminé que $\lambda_4(17) = \frac{206}{36465} = 0{,}005649...$

On rappelle que $\lambda_4(13) = \frac{31}{5005} = 0{,}006193...$

Donc $\boxed{\lambda_4(13) > \lambda_4(17)}$

Ainsi **la probabilité d'apparition dans le 4ème facteur d'un nombre présente un maximum pour 13.**

On peut aussi dire que **le NP 13 est le NP qui apparaît le plus souvent comme 4ème facteur premier d'un entier.**

Dans l'ordre des probabilités d'apparition pour le 4ème facteur :

13 (0,619 %), 17 (0,564 %), 11 (0,562 %), …

On peut compléter le tableau précédent

Les cases colorées en JAUNE correspondent aux MAXIMA de probabilité pour un facteur donné. Les NP correspondant sont les « NP CHAMPIONS »

k ➔ p_i ▼	1^er^ rang	2^ème^ rang	3^ème^ rang	4^ème^ rang	5^ème^ rang	6^ème^ rang	7^ème^ rang
2 $i = 1$	1/2 0,500 000 …	0	0	0	0	0	0
3 $i = 2$	1/6 0,166 166 …	1/6 0,166 166 …	0	0	0	0	0
5 $i = 3$	1/15 0,066 666 …	1/10 0,100 000 …	1/30 0,033 333 …	0	0	0	0
7 $i = 4$	4/105 0,038 095 …	1/15 0,066 666 …	1/30 0,033 333 …	1/210 0,004 761	0	0	0
11 $i = 5$	8/385 0,020 779 …	46/1155 0,039 826 …	4/165 0,024 242 …	13/2310 0,005 627	1/2310 0,000 432 …	0	0
13 $i = 6$	16/1001 0,015 984 …	44/1365 0,032 234 …	326/15015 0,021 711 …	31/15015 0,006 193 …	23/30030 0,000 765 …	1/30030 0,000 033 …	0
17 $i = 7$	192/17017 0,011 282 …	288/12155 0,023 693 …	628/36465 0,017 221 …	206/36465 0,005 649 …	1/1105 0,000 904 …	1/14586 0,000 068 …	$\lambda_7(17)$*

$\lambda_7(17)$ = 1 / 510510
= 0,000 001 958 …

Remarque sur les sommes des termes de chaque ligne du tableau

On rappelle la propriété énoncée page 6 :

La somme des probabilités que le NP p_i soit le k-ième facteur d'un nombre est égal à l'inverse de p_i.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{i} \lambda_k(p_i) = \frac{1}{p_i}}$$

1 / 2 pour la 1^ère^ ligne,
1 / 3 pour la 2^ème^ ligne,
1 / 5 pour la 3^ème^ ligne, …

La somme de toutes les sommes du tableau est la somme des inverses des NP.
En 1737, EULER a démontré que cette somme diverge.
Par conséquent, si p_i est le NP de rang i alors :

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p_i}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty} p_i=+\infty}$$

Le théorème de raréfaction d'EULER indique que l'infini des NP est un « gros infini », ce qui signifie que ceux-ci ne se raréfient pas très vite.

La somme des inverses des NP est certes infinie mais la divergence se fait très lentement. Si l'on additionne l'inverse de tous les NP :

- inférieurs à 1000 (il y en a 168), on obtient 2,1908 …
- inférieurs à 10 000 (il y en a 1229), on obtient 2,483 05 …
- inférieurs à 100 000 (il y en a 9592), on obtient 2,705 272 21 …

On a démontré que :

Si p est un NP, $p \leq n$, alors $\mathrm{Log}\,(\,\mathrm{Log}\,(n)\,) \leq \sum_{p} \frac{1}{p} \leq \mathrm{Log}\,(\,\mathrm{Log}\,(n)\,) + 1$

i =8, $p_8 = 19$

19 est le 8ème NP. Par conséquent, il a 8 positions possibles.et 128 situations (1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128)

Les calculs donnent les résultats suivants :

$$\lambda_1(19) = \frac{1}{19} \times \frac{3072}{17017} \quad \text{ou} \quad \lambda_1(19) = \frac{3072}{323323} = 0{,}009\,501 \ldots$$

$$\lambda_2(19) = \frac{1}{19} \times \frac{33216}{85085} \quad \text{ou} \quad \lambda_2(19) = \frac{33216}{1616615} = 0{,}020\,546 \ldots$$

$$\lambda_3(19) = \frac{1}{19} \times \frac{992}{3315} \quad \text{ou} \quad \lambda_3(19) = \frac{992}{62985} = 0{,}015\,749 \ldots$$

$$\lambda_4(19) = \frac{1}{19} \times \frac{1308}{12155} \quad \text{ou} \quad \lambda_4(19) = \frac{1308}{230945} = 0{,}005\,663 \ldots$$

$$\lambda_5(19) = \frac{1}{19} \times \frac{734}{36465} \quad \text{ou} \quad \lambda_5(17) = \frac{734}{692835} = 0{,}001\,059 \ldots$$

$$\lambda_6(19) = \frac{1}{19} \times \frac{73}{36465} \quad \text{ou} \quad \lambda_6(19) = \frac{73}{692835} = 0{,}000\,105 \ldots$$

$$\lambda_7(19) = \frac{1}{19} \times \frac{1}{10010} \quad \text{ou} \quad \lambda_7(19) = \frac{1}{190190} = 0{,}000\,005 \ldots$$

(= 0,000 005 257 …)

$$\lambda_8(19) = \frac{1}{19} \times \frac{1}{510510} \quad \text{ou} \quad \lambda_8(19) = \frac{1}{9699690} = 0{,}000\,000\,1\ldots$$

(= 0,000 000 103…)

On vérifie que : $\sum_{k=1}^{8} \lambda_k\left(p_8\right) = \frac{1}{p_8}$

$i = 9$, $p_9 = 23$

23 est le 9ème NP. Par conséquent, il a 9 positions possibles.et 256 situations

:

$$\lambda_1(23) = \frac{1}{23}\times\frac{55296}{323323} = \frac{1}{23}\times\frac{1658880}{9699690} = 0{,}007\ 435\ 827\ \ldots$$

$$\lambda_2(23) = \frac{1}{23}\times\frac{613248}{1616615} = \frac{1}{23}\times\frac{3679488}{9699690} = 0{,}016\ 493\ 078\ \ldots$$

$$\lambda_3(23) = \frac{1}{23}\times\frac{98304}{323323} = \frac{1}{23}\times\frac{2949120}{9699690} = 0{,}013\ 219\ 248\ \ldots$$

$$\lambda_4(23) = \frac{1}{23}\times\frac{81544}{692835} = \frac{1}{23}\times\frac{1141616}{9699690} = 0{,}005\ 117\ 223\ \ldots$$

$$\lambda_5(23) = \frac{1}{23}\times\frac{336}{13585} = \frac{1}{23}\times\frac{239904}{9699690} = 0{,}001\ 075\ 354\ \ldots$$

$$\lambda_6(23) = \frac{1}{23}\times\frac{14336}{4849845} = \frac{1}{23}\times\frac{28672}{9699690} = 0{,}000\ 128\ 520\ \ldots$$

$$\lambda_7(23) = \frac{1}{23}\times\frac{194}{969969} = \frac{1}{23}\times\frac{1940}{9699690} = 0{,}000\ 008\ 695\ \ldots$$

$$\lambda_8(23) = \frac{1}{23}\times\frac{23}{3233230} = \frac{1}{23}\times\frac{69}{9699690} = 0{,}001\ 000\ 309\ \ldots$$

$$\lambda_9(23) = \frac{1}{23}\times\frac{1}{9699690} = \frac{1}{23}\times\frac{1}{9699690} = 0{,}000\ 000\ 004\ \ldots$$

On vérifie que : $\sum_{k=1}^{8} \lambda_k(p_9) = \frac{1}{p_9}$

Classement des probabilités de présence des NP 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23

dans le 5ème facteur

$\lambda_5\,(5) = \lambda_5\,(7) = 0$

$\lambda_5\,(11)$	1/11 x 1/210	1 / 2310	0,000 432 900 …	5ème
$\lambda_5\,(13)$	1/13 x 23/2310	23 / 30030	0,000 765 900 …	4ème
$\lambda_5\,(17)$	1/17 x 1/65	1 / 1105	0,000 904 977 …	3ème
$\lambda_5\,(19)$	1/19 x 734/36465	734 / 692835	0,001 059 415 …	2ème
$\lambda_5\,(23)$	1/23 x 239304/9699690	239304 / 223092870	0,001 072 665 …	1er

Nous avons une suite croissante des probabilités de présence de 11 à 23 :

$$\lambda_5\,(11) < \lambda_5\,(13) < \lambda_5\,(17) < \lambda_5\,(19) < \lambda_5\,(23)$$

Le taux de croissance diminue et semble atteindre un maximum pour 23 :

$$\lambda_5\,(13) - \lambda_5\,(11) = 0{,}000\ 333\ 000 \ldots$$
$$\lambda_5\,(17) - \lambda_5\,(13) = 0{,}000\ 139\ 077 \ldots$$
$$\lambda_5\,(19) - \lambda_5\,(17) = 0{,}000\ 154\ 438 \ldots$$
$$\lambda_5\,(23) - \lambda_5\,(19) = 0{,}000\ 013\ 250 \ldots$$

Pour confirmer que la probabilité de présence présente un maximum pour 23, il nous faut calculer $\lambda_5\,(29)$.
La recherche et les calculs concernant les 126 situations possibles
nous ont permis d'obtenir :

$$\lambda_5\,(29) = 0{,}000\ 992\ 242 \ldots$$

par conséquent : $\boxed{\lambda_5\,(29) < \lambda_5\,(23)}$

23 est donc le NP qui a le plus de chance d'apparaître dans le 5ème facteur d'un entier.

Cependant, on remarque la très faible différence des deux résultats :

$$\lambda_5\,(23) - \lambda_5\,(29) = 0{,}000\ 083\ 112 \ldots < 9 \times 10^{-5}$$

On pourrait dire que 23 a « un tout petit peu plus de chance » que 29 d'être le 5ème facteur d'un entier.

QUELS SONT LES NP CORRESPONDANT À DES MAXIMA DE PROBABILITÉ DE PRÉSENCE DANS LES FACTEURS D'UN ENTIER ?

Jean-Marie DE KONINCK et Gérald TENENBAUM ont collaboré sur ce problème et leurs travaux sont présentés dans l'ouvrage « ***Sur la loi de répartition du k-ième facteur premier d'un entier*** » [Math. Proc. Cambridge Philo. Soc 133 (2002) no 2.

Dans le livre « Ces nombres qui nous fascinent », J.M. DE KONINCK propose le tableau suivant qui donne les 18 premiers NP qui correspondent chacun à un maximum de présence dans un des 2699 facteurs premiers d'un entier.

La 1ère colonne k est le rang du facteur premier
La 2ème colonne est le NP qui a la probabilité de présence la plus élevée dans le k-ième facteur.
La 3ème colonne est le rang du NP, c'est-à-dire le nombre de NP inférieurs ou égal à $P(k)$ noté $\pi(P(k))$

k	$P(k)$	Rang du NP
1	**2**	**1**
2	**3**	**2**
3	**5 et 7**	**3 et 4**
4	**13**	**6**
5	**23**	**9**
6	**47**	**15**
7	**113**	**30**
8	**199**	**46**
9	**283**	**61**
10	**467**	**91**
11	**887**	**154**
12	**1 627**	**258**
13	**2 083**	**409**
14	**4 297**	**590**
15	**6 397**	**834**
16	**10 343**	**1 270**
17	**16 111**	**1 876**
18	**24 251**	**2 699**

Par exemple, le NP 4 297, qui est le 590ème NP (dans la suite des NP à compter de 2) est celui qui a le plus de chance d'apparaître dans le 14ème facteur premier d'un entier.

On propose un autre tableau qui illustre la croissance très rapide de ces NP :

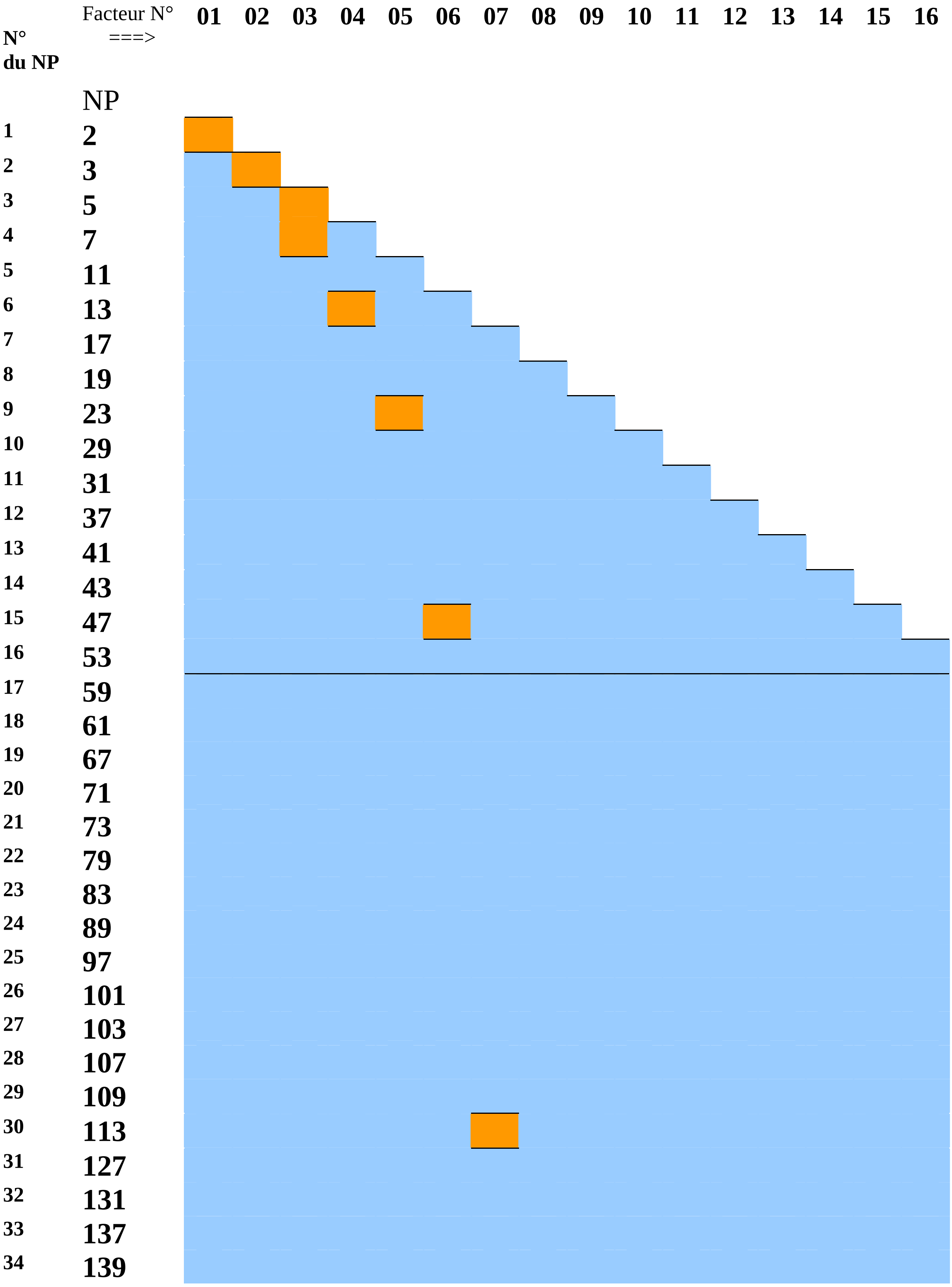

Tableau illustrant les NP qui apparaissent le plus souvent
dans les 7 premiers facteurs premiers d'un nombre

NP \ k (rang du fact.)	p_i	Facteur N°1	Facteur N°2	Facteur N°3	Facteur N°4	Facteur N°5	Facteur N°6	Facteur N°7	Facteur N°8	Facteur N°9	Facteur N°10
$i=1$	2	$1/2$ 0,500 000…	0	0	0	0	0	0	0	0	
$i=2$	3	$1/6$ 0,166 666…	$1/6$ 0,166 666…	0	0	0	0	0	0	0	
$i=3$	5	$1/15$ 0,066 666…	$1/10$ 0,100 000…	$1/30$ 0,033 333…	0	0	0	0	0	0	
$i=4$	7	$4/105$ 0,038 095…	$1/15$ 0,066 666…	$1/30$ 0,033 333…	$1/210$ 0,004 761…	0	0	0	0	0	
$i=5$	11	$8/385$ 0,020 779…	$46/1155$ 0,039 826…	$4/165$ 0,024 242…	$13/2310$ 0,005 627…	$1/2310$ 0,000 432…	0	0	0	0	
$i=6$	13	$16/1001$ 0,015 984…	$44/1365$ 0,032 234…	$326/15015$ 0,021 711…	$31/5005$ 0,006 193…	$23/30030$ 0,000 765…	$1/30030$ 0,000 033…	0	0	0	
$i=7$	17	$192/17017$ 0,011 282…	$288/12155$ 0,023 693…	$628/36465$ 0,017 221…	$206/36465$ 0,005 649…	$1/1105$ 0,000 904…	$1/14586$ 0,000 068…	$1/510510$ $1{,}95 \times 10^{-6}$	0	0	
$i=8$	19	$3072/323323$ 0,009 501…	$\frac{33216}{1616615}$ 0,020 546…	$992/62985$ 0,015 749…	$1308/230945$ 0,005 663…	$734/692835$ 0,001 059	$73/692835$ 0,000 105…	$1/190190$ $5{,}25 \cdot 10^{-6}$	$1/9699690$ $0{,}103 \times 10^{-6}$	0	
$i=9$	23	$\frac{55296}{7436429}$ 0,007 435…	$\frac{613248}{37182145}$ 0,016 493…	$\frac{98304}{7436429}$ 0,013 219…	$\frac{81544}{15935205}$ 0,005 117…	$336/312455$ 0,001 075…	$\frac{14336}{111546435}$ 0,000 128…	$\frac{194}{22309287}$ $8{,}69 \cdot 10^{-6}$	$1/3233230$ $0{,}309 \times 10^{-6}$	$\frac{1}{223092870}$ $0{,}00448 \cdot 10^{-6}$	
$i=10$	29	$\frac{110592}{19605131}$ 0,005 640…									

Peut-on conclure ?

Quelques mots pour terminer

Dans ce petit exposé, nous avons montré comment calculer la probabilité de présence (ou même la probabilité d'absence) d'un NP dans un des facteurs premiers de la décomposition d'un entier.

Les calculs mettent en évidence des résultats qui, au départ, semblent paradoxaux. Cependant, au fur et à mesure des recherches, ils deviennent beaucoup plus acceptables mais leur imprévisibilité demeure.

Pourquoi 13 est le NP ayant le plus de chance d'être le $4^{ème}$ facteur premier d'un entier ? Pourquoi pas 11 ou 17 ou 19 ? Comment 113 - qui est le $30^{ème}$ NP - peut-il être le $7^{ème}$ facteur le plus probable ? Quel décalage !

Seuls les calculs valident ces résultats. En fait, la véritable preuve se trouve certainement dans l'ouvrage de DE KONINCK et G. TENENBAUM « Sur la loi de répartition du k-ième facteur premier d'un entier ». Mais nous n'y avons pas eu accès et nous doutons de notre capacité à maîtriser des mathématiques de ce niveau.

Nous avons cependant cherché quelques indices concernant les « NP champions » : 2 ; 3 ; 5 et 7 ; 13 ; 23 ; 47 ; 113 ; 199 ; 283 ; 467 ;…qui expliqueraient un tant soit peu ce qui les distingue des autres NP. :

Nous avons remarqué, à partir de 13, que les « NP champions » présentent avec le NP suivant des écarts nettement plus importants par rapport à l'écart moyen entre 2 NP consécutifs (2 et puis 6) : 4 entre 13 et 17 ; 6 entre 23 et 29 ; 6 entre 47 et 53 ; 14 entre 113 et 127 ; 12 entre 199 et 211 ; 10 entre 283 et 293 ; 12 entre 467 et 479 ; …Il faut quand même noter qu'il y a quelques exceptions et tout cela est bien insuffisant pour amorcer une explication.

Les nombres premiers n'ont pas fini de nous poser des problèmes.

HARDY, un grand mathématicien anglais, aimait dire que n'importe quel imbécile peut poser sur les nombres premiers des questions auxquelles l'homme le plus sage est incapable de répondre.

Et cela dure depuis, au moins, trois mille ans !