Baccalauréat C Extrême-Orient juin 1978

EXERCICE 1

1. Déterminer le plus grand commun diviseur de 2 045 et 64.
2. En déduire que l'équation :

$$(1) \qquad 2045x - 64y = 1$$

a une solution au moins.
Trouver une solution particulière de l'équation (1).
3. Résoudre l'équation (1).

EXERCICE 2

Soit la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Log}\,\dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$$

1. Montrer qu'elle est impaire.
Étudier ses variations et construire la courbe représentatrice.
2. Calculer en utilisant une intégration par parties :

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } x > 1.$$

Démontrer que $F(x)$ a une limite quand x tend vers 1 et calculer cette limite.
3. Établir l'inégalité

$$\text{Pour tout } x > 1, \quad F(x) \leqslant -\text{Log}\,\left(x^2 - 1\right) + 3\text{Log}\,3.$$

En déduire la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

1. Soit la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc}]-\pi\,;\,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{3}{1+\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta} \end{array}$$

Vérifier que $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et en déduire l'ensemble de définition D de f.
Déterminer le sens de variation de f et en déduire le signe de $f(\theta)$.
2. Soit un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On considère le point m de coordonnées :

$$x = f(\theta)\cos\theta \quad ; \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

Soit M l'image de m par la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$. On pose :

$$\begin{array}{rcll} z & = & x+\mathrm{i}y & \text{(affixe du point } m) \\ Z & = & X+\mathrm{i}Y & \text{(affixe du point } M) \end{array}$$

Calculer Z en fonction de z, puis X, Y en fonction de θ.

Établir l'égalité : $f(\theta)+2X-3=0$.

Déterminer l'équation cartésienne de la courbe à laquelle appartient le point M.

3. Soit H la courbe d'équation : $Y^2=3X^2-12X+9$.

Déterminer son centre, ses sommets, ses asymptotes, ses foyers et ses directrices.

4. À tout réel φ on associe la droite D_φ passant par l'origine, de vecteur directeur $\left(\cos\varphi\ ;\ \sin\varphi\right)$.

a. Démontrer que D_φ coupe en général H en deux points :

$$\begin{array}{lcl} M' \text{ d'affixe } Z' & = & \dfrac{3(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}{1+2\cos\varphi} \\ M'' \text{ d'affixe } Z'' & = & \dfrac{3(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}{1-2\cos\varphi} \end{array}$$

b. Soit P le point d'affixe p tel que $\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{Z'}+\dfrac{1}{Z''}$.

Déterminer l'ensemble des points P.

c. Démontrer que le nombre $\left(Z'-\dfrac{3}{2}\right)\left(Z''-\dfrac{3}{2}\right)$ est réel et en déduire les bissectrices de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M'},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M''}\right)$, A étant le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\right)$.