"Souvenirs d'apprentissages"

Lucienne Félix

94410 Saint Maurice

Cet article nous a été envoyé par Lucienne Félix le 15 mars 1991... jour de ses 90 ans! Il témoigne d'une fraîcheur d'esprit assez rare et sonne comme un amical rappel à l'ordre à ceux d'entre nous qui, pour toutes sortes de raisons, finiraient par oublier les élèves et leur part de vérité.

Je suis très touchée des termes amicaux employés dans le *Bulletin* (n°376, décembre 1990) pour signaler ma petite note à l'IREM de Grenoble (1)

Le *Bulletin*, ces dernières années est fort intéressant. Riche et varié, il étudie dans un esprit moderne les diverses questions que pose l'enseignement actuel des mathématiques à tous les niveaux. Pour une ancienne, c'est l'occasion de nombreuses comparaisons, sur la forme des recherches encore plus que sur le fond, car le problème de l'enseignement des mathématiques qui s'est toujours posé, évolue et ne sera , je le crois, jamais résolu définitivement. La liste des "membres actifs" du Bureau, des Commissions,

(1) Il s'agit du texte de l'intervention de l'auteur à l'Ecole d'Eté de Didactique de PLESTIN-les-GREVES (Août 89), publié par l'IREM de GRENOBLE dans *"Petit x"* (n°23/1990). Lucienne FELIX a d'ailleurs suivi de bout en bout cette Université d'Eté en montrant une énergie et une vivacité d'esprit que bien des moins de 90 ans (et de beaucoup) peuvent lui envier.

des chargés de missions et groupes de travail, prouve un effort collectif qui n'a rien de commun avec ce qui se faisait dans les années 20, quand je débutais dans le métier ! Les rubriques de chaque numéro du *Bulletin* concernent les études sur lal formation des mathématiques par les savants, celle des professeurs par les mathématiciens (et par des "Conseillers pédagogiques" et des "formateurs") et, pour finir, celle des élèves du niveau secondaire ou des classe élémentaires par les professeurs. On y voit systématisés, organisés, officialisés, les efforts plus ou moins conscients et explicites des enseignants de tous les temps. Mais je n'y trouve guère un sujet qui, vieille retraitée, m'est cher : *"ce que le maître* ***apprend de ses élèves...*** *et de l'enfant qu'il fut"*.

En fin de vie, dans un présent souvent pénible et un avenir sans espoirs, la mémoire fait revivre le passé, les étapes de notre propre formation et le désir d'en parler. Il est bien connu que "les vieux radotent" et comparent l'actualité "au bon vieux temps". Ce peut ne pas être sans intérêt pour nos jeunes collègues, car il y a une permanence de la nature humaine dans le passage de l'enfance à l'adolescence et à la maturité (sans parler de la déchéance dans la routine). Permanence malgré les impératifs de l'actualité, les exigences nouvelles de la vie sociale, les progrès des sciences et techniques, les intérêts ou espoirs des nouvelles générations. Permanence qui se révèle en chaque individu aux instants critiques de crise, d'illumination ou de doute, chocs inattendus, incontournables, inoubliables qui nous unissent ou nous séparent mais qui forgent notre personnalité en tant qu'être humain.

Dans les écoles, les enseignants ne doivent pas se croire uniquement chargés de faire apprendre aux élèves le contenu de programmes élaborés et imposés par la hiérarchie. Ils savent bien que l'essentiel de leur tâche est d'élever le niveau intellectuel des élèves, de développer leur aptitude à comprendre, à chercher, à acquérir une culture personnelle. Mais aucune formation ne se fait par progrès continus, comme la digestion d'un repas diététique, comme un cheminement plus ou moins aisé le long d'un couloir fléché et éclairé. C'est le malaise dans l'obscurité, l'obstacle surmonté ou contourné, l'angoisse d'une question sans réponse, qui, peu à peu, fait prendre conscience de la force qui est en nous de comprendre, discuter, conclure. Qu'y peut faire le maître dans sa chaire ou au tableau, à l'heure fixée ? Tenter de percevoir les éclairs qui illuminent tel ou tel élève et tenter d'en faire profiter le groupe.

Bienheureux les jeunes qui ont la "bosse des maths" c'est-à-dire qui ont conscience des brusques lumières et savent en profiter, et plus encore s'ils ont des interlocuteurs qui les comprennent et leur répondent. A la question *"comment avez-vous réussi à trouver une solution ?"*, Newton aurait répondu *"en y pensant toujours"*. Au contraire, Henri Poincaré assure avoir brusquement compris la nature des fonctions Fuchsiennes, alors qu'il n'y pensait pas, en montant dans un tramway de la Côte Normande. Nos élèves, comme nous, ne sont ni des Newton, ni des Pascal, ni des Poincaré, mais chacun, même le plus humble, a éprouvé un jour le choc qui lui a fait s'écrier *"j'ai compris !"* Pour être utile, il faudrait réunir les confidences du plus grand nombre des anciens pour les classer et les comparer à nos souvenirs personnels.

Ceci ne concerne pas uniquement notre science ; je suis tentée en cet instant de raconter les quelques chocs émotifs, clairs et simples, qui ont provoqué ma très humble formation musicale. Mais il est question ici de mathématiques et ce fut beaucoup plus complexe. Je vais avouer mes aventures les plus marquantes qui émergent de l'apprentissage assuré par les études universitaires continues.

Premier contact avec l'infini

Je dois avoir environ 5 ou 6 ans. Sur la table de la cuisine se trouve une boîte de cacao. J'y vois un cuisinier qui tient une boîte sur laquelle figure un cuisinier qui tient ... Je n'en distingue pas plus, ne fais aucun geste ni ne pense aucune parole, mais *je sens une suite sans fin* d'une réalité toujours semblable à elle-même... La secousse fut si forte qu'à plusieurs reprises, les nuits où j'avais de la fièvre, j'eus ce cauchemar : je marche dans l'obscurité ; ma main droite levée est saisie par une main puissante. Une voix autoritaire affirme : "marche, marche, *on peut toujours faire un pas de plus*". Epuisée, je ne connais pas la solution, tombe évanouie, et je me réveille en sueur, anéantie.

Bien des années plus tard, en classe de 4ème, où j'enseignais, nous avons commencé la liste des nombres premiers et démontré, en toute sérénité *"qu'on peut toujours trouver un nombre premier plus grand que ceux qu'on connait"*. La perception muette de l'infini dénombrable, n'était pas terrifiante pour des enfants de 13-14 ans, mais pourtant troublante! La sonnerie de fin de cours sonna et je n'eus que le temps de dicter la conclusion : "il y a une infinité de nombres premiers". Une enfant vint alors me demander, anxieuse *"est-ce tout à fait la même chose de dire* - «après tout nombre de la liste, il y en a encore de plus grands» *ou de dire* «il y a une infinité de ces nombres»*?"* Tout ceci méritait qu'on y consacre une heure le plus tôt possible. C'est l'infini continu qui préoccupait surtout les enfants, dans le temps plus que dans l'espace et dans le passé, car le futur ne préoccupe guère les jeunes ("Mon petit frère vient de naître, mais avant ma naissance à moi ?...").

Après discussion, l'infini-mathématique fut déclaré sans mystère, avec des énoncés précis, sans problèmes touchant notre intimité. Plus tard, il n'y eut aucun obstacle à introduire les notions de limite, de continuité, surtout à l'époque où l'on pouvait remplacer le discours par l'écriture du type :

$$[\forall \varepsilon > 0 \,, \exists\, \alpha \text{ tel que } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Le scandale du vocabulaire.

Vers 10 ans, je suis une élève appliquée. Je sais très bien ce qu'est une multiplication : multiplier par 4, c'est faire la somme de quatre nombres A (c'est-à-dire 3 additions : $A \times 4 = A + A + A + A$). Or, sans préparation, la maîtresse déclare calmement "prendre le quart, c'est multiplier par un quart" et elle écrit $A \times \frac{1}{4}$. Révoltée, je reste cependant silencieuse et immobile car je sais (et je le crois encore) que cette brave Mlle D. n'aurait rien pu expliquer pour se justifier.

Bien sûr, je m'accoutumais à utiliser ce mot "multiplication" par les nombres (dits maintenant "relatifs" et que l'on disait "algébriques"), pour les produits de polynômes ou fractions rationnelles, pour les nombres complexes, pour les transformations géométriques... Mais me voici en classe de préparation à l'Ecole Normale Supérieure de Sèvres. A cette époque, l'essentiel était de réviser les mathématiques élémentaires, depuis les premiers chapitres. Pour l'addition dans chacun des ensembles énumérés plus haut, on répète la suite des théorèmes : *l'ordre* des termes pour 2 termes, pour les deux derniers de trois termes, pour trois termes, pour deux consécutifs de n termes, pour les n termes - et de même pour les sommes partielles pour démontrer l'associativité. Et tout reprendre pour les multiplications - et pour les transformations ponctuelles, pour les vecteurs... Je me revois, en rage, un après-midi d'hiver dans une salle éclairée par des becs de gaz bruyants et surchauffée par le poêle à charbon. "Mais il doit y avoir moyen d'éviter ces répétitions, de dire une bonne fois en quoi toutes ces opérations se ressemblent!" Quel soulagement quand BOURBAKI éclaira cela, quand on put penser et exprimer ce qui caractérise chaque structure...le penser et l'enseigner!

Vérité et certitude.

Ma première année d'enseignement (en 4$^{\text{ème}}$), je juge amusant d'introduire les systèmes d'équations par le fameux problème *"Je donne le nombre total des pattes et celui des têtes des animaux de la ferme qui élève des poules et des lapins (par exemple 18 têtes et 52 pattes). Combien y a-t-il de poules et de lapins ?"* Dans une copie, je lis la conclusion : *"chaque lapin a 32 pattes"*. L'auteur à qui je demande ce qu'elle pense de ce résultat s'exclame "Oh! en mathématiques!" et hausse les épaules. Elle a raison : si l'énoncé est libre de poser des hypothèses quelconques, les réponses ne peuvent-elles pas être quelconques ?

Bien avant l'âge scolaire, je savais compter, mettons jusqu'à dix. On me posait des questions du type *"j'avais 7 petits beurres, ton frère en a mangé 5. Combien en reste-t-il ?"* Je savais que c'était une histoire inventée, mais je savais ma réponse exacte, d'autant plus que je mangeais les deux biscuits dits "restants".

Une fillette refuse de répondre au problème qui ressemble au précédent *"Il y avait 7 cerises dans le compotier. J'en retire 5. Combien reste-t-il de cerises?"* Exaspérée de l'insistance du questionneur, l'enfant s'écrie "mais, à, la fin, qu'est-ce que tu en as fait des cerises retirées ?"- "Je les ai mangées!" - "Mais alors bien sûr, il en reste 2!"

Une amie me fait l'aveu d'un souvenir de sa petite enfance. Sa mère avait entendu dire qu'il fallait enseigner avec des exemples "concrets", aussi avait-elle enseigné à sa petite fille *"3 pommes et 2 pommes, ça fait 5 pommes"*. L'enfant récitait, mais il y avait un grave malentendu : il ne s'agissait pas de "pommes" mais d'un signe de ponctuation qui aurait pu se dire "pom", toc"(*)...être remplacé par un coup sur la table ... Qui était la plus mathématicienne ?

Classe de 4$^{\text{ème}}$, première composition de géométrie au tout début de l'année. Le jeune B. de C., beau petit bonhomme à l'air franc, me fait signe et vient au bureau. "Madame, les hypothèses de la 2$^{\text{ème}}$ questions sont bien les conclusions de la 1$^{\text{ère}}$? J'admire la pertinence de cette demande et donne la réponse à toute la classe. J'ai honte de n'avoir même pas enseigné cela ! Mais pourtant, quelle est la certitude qu'énonce l'affirmation en conclusion puisque c'est moi qui l'ai trouvée ? Suis-je infaillible ?

En classe de philosophie, une élève croit prudent, pour conclure à l'égalité de deux triangles, de la déduire de l'énoncé les trois cas d'égalité. C'est elle qui termine ses démonstrations par la phrase "Nous nous croyons autorisés à conclure que cette égalité est vraie"...Cela après 6 ans d'études secondaires et l'obtention de la première partie du baccalauréat!

La relativité de la vérité en mathématiques est vivement ressentie par les bons élèves. Une jeune élève me donne une lettre de son frère : "vous avez dit

(*) Et pourquoi le lecteur ne mettrait-il pas des "blancs" à leur place ?...

à ma sœur « $x + 7 = 4$ n'a pas de solution». Moi, je sais qu'il y a la solution $x = -3$". Je répondis : "Vous avez raison parce que vous connaissez les nombres négatifs, de même que $3x = 5$ n'a pas de solution pour ceux qui ne connaissent que les nombres entiers. Du reste, vous apprendrez plus tard que $x^2 + 5 = 0$ a deux solutions si l'on accepte de nouveaux nombres". Le hasard me fit, des années plus tard, retrouver ce correspondant devenu jeune homme. Il se présenta : "c'est moi à qui vous avez écrit. J'ai pensé à vous quand j'étais en mathématiques spéciales" et nous avons causé amicalement.

Quand faut-il avertir les élèves de la relativité de la vérité mathématique ?

La puissance créatrice des structures.

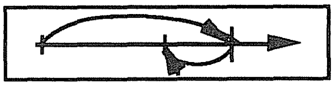
Avant de clore cette suite choisie dans mes aventures scolaires, je voudrais conter (bien que ce soit un peu long) un de mes meilleurs souvenirs. (Le lecteur est prié de se munir de deux crayons de couleur, disons rouge et bleu.L'emploi de la couleur est tellement plus expressif et convaincant que l'expression verbale. D'autant plus qu'à l'époque, la langue, bien que transformée depuis... disons Pascal, n'était pas adaptée à la pensée moderne, en retard sur l'écriture des formules mathématiques et de la logique).

Classe de 4ème. Les élèves ont bien assimilé les structures additive et multiplicative des nombres que nous qualifions "d'absolus" par contraste avec les nombres "relatifs" que nous allons créer. Je propose d'étudier les nombres répartis en deux classes, disons les *bleus* et les **rouges** ; par exemple, ils mesureront [les gains et les pertes] ou des changements [monter ou descendre], [avancer ou reculer], [chauffer ou refroidir]. Dans un jeu entre René et Paul, si René gagne 5 billes, je noterai [5 rouge] (faute de couleurs, j'écris ici **5**). S'il perd 3 billes, je note [3 bleu] (ici *3*). Je note la succesion de gains et pertes par le signe "+" . Ainsi **5** + *2* donne à la fin du jeu **3**.

$$\boxed{\mathbf{5} \quad + \quad \mathit{2} \quad = \quad \mathbf{3}}$$

S'il s'agit de déplacements sur une route, les distances étant mesurées en mètres, on écrira par exemple :

$$\boxed{\mathbf{12} \;+\; \mathit{3{,}5} \;=\; 12 \;-\; 3{,}5 \;=\; \mathbf{8{,}5}}$$



Le zéro, élément neutre s'écrit 0 (sans couleur, comme les valeurs absolues)

$$\boxed{\mathbf{5} \quad + \quad \mathit{5} \quad = \quad 0}$$

Le jeu peut-il se poursuivre avec une autre opération, une multiplication ? Mais pour avoir le droit de l'appeler "multiplication", on exige qu'elle vérifie les structures connues, commutativité, associativité, distributivité sur l'addition.

S'il s'agit de la multiplication d'un relatif et d'un absolu, la convention est évidente. Au reste, les exemples abondent, surtout quand le nombre absolu est entier : 3 fois un gain de 6,50 F s'écrira :

$$\boxed{3 \times 6{,}50 = 19{,}50}$$

Cette règle donne bien la structure désirée de distributivité, d'associativité. Mais peut-on inventer une règle satisfaisante pour des couples de nombres colorés, par exemple :

$$5 \times 4 = 4 \times 5 \quad ; \quad 5 \times 4 = 4 \times 5 \quad ; \quad 5 \times 4 = 4 \times 5 \ ?$$

On se met d'accord pour préférer les "rouges", et l'on décide d'écrire :

$$5 \times 4 = 20$$

Mais il serait juste d'écrire aussi : $5 \times 4 = 20$. Pourquoi pas ?

Que dire maintenant de 5×4 ?

Il me faut intervenir pour suggérer une suite à l'étude : "N'oubliez pas que l'on désire la distributivité sur l'addition et le rôle du zéro". Au tableau, on avait écrit : $a + a = 0$, $b \times 0 = 0$, $c \times 0 = 0$. Et voilà que la plus jeune élève suffoque "Oh! Oh!, 0". Elle se précipite au tableau et écrit (avec les couleurs) :

$4 + 4 = 0$ donc $5 \times (4 + 4) = 0$

Cela fait $(5 \times 4) + (5 \times 4) = 0$

Mais, $5 \times 4 = 20$ est rouge donc $5 \times 4 = 20$ *bleue*.

Elle conclut, étonnée et joyeuse :"*En multiplication, rouge avec rouge fait rouge et rouge avec bleu fait bleu*". Alors, toute la classe se demande ce que peut faire bleu avec bleu!...et l'on trouve que bleu avec bleu cela fait rouge! "*Deux couleurs pareilles, cela fait rouge, deux couleurs différentes, cela fait bleu*".

Pas une fois je n'ai entendu le redoutable "à quoi ça sert ?" Le jeu des structures est désintéressé. Il reste à chercher une rédaction satisfaisante de tout celà. Mais on est content quand je donne un exemple, le seul immédiatement compris par les enfants : la formule qui généralise en nombres "colorés" celle, bien connue du mouvement rectiligne uniforme :

$v = (x - x_0) / t$ (*) (le produit de deux longueurs mesurant une surface est encore mieux connue, mais l'orientation des surfaces qui introduit des aires positives ou négatives apparaîtrait comme bien arbitraire, si l'on n'en montre pas l'utilité).

Toute cette introduction, nouvelle quand on est habitué à penser "en structure", fait bien sentir l'arbitraire de la confusion positif/additif et négatif/soustractif des notations d'usage, les deux couleurs et les signes opératoires étant notés par l'unique couple {+,-}. Il faut une étude complémentaire.

Nous avons pris ici un exemple frappant du fait que littéraires et philosophes nient trop souvent : la pensée mathématique précède son expression verbale et se transmet surtout par des schémas et des formules de types algébrique ou logique. Mais quelles trouvailles de vocabulaire! Yves en 6ème s'exclame "être carré, c'est un accident pour un rectangle". Florence en 4ème déclare : "oui, +1 est l'élément neutre de la multiplication et - 1 est l'élément contrariant"...

Pour conclure, je crois que les observations du maître attentif peuvent lui apporter les éléments d'une formation valable. A l'écoute des élèves, l'enseignant poursuit sa formation.

Mais il est bien tard lorsque le carnet où il note ses remarques est assez riche! N'est-il pas décevant de n'en être pourvu qu'à la veille de la retraite ?

Un recueil rassemblant les comptes-rendus des expériences de nombreux enseignants ne serait-il pas intéressant pour les débutants ? Il est vrai qu'on ne profite pleinement que de ce qu'on a vécu soi-même et que seule l'expérience individuelle fait acquérir une personnalité.

Mais la lecture d'un tel recueil serait sans doute utile pour éveiller la curiosité des débutants et leur faire apprécier les travaux actuels de didactique qui y trouvent leur justification. Car ce sont nos patientes et nombreuses observations qui ont semé les graines de cette science nouvelle.

(*) Il est facile d'imaginer ici $(x - x_0)$ et t négatifs, v étant positif.