∽ Concours Fesic mai 2007 ∾

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.
+ 1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A d'affixe i, M d'affixe z et M' d'affixe z' avec $z \neq z'$.
On appelle : h l'homothétie de centre A et de rapport 2, t la translation de vecteur $\vec{v}$ et r la rotation de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Si $M' = h(M)$, alors $z' = 2z - \text{i}$.
2. Si $M' = t(M)$, alors $z' = z - \text{i}$.
3. Si $M' = r(M)$, alors A appartient à la médiatrice de $[MM']$.
4. Soit B le point d'affixe $4 - 3\text{i}$. Le point $B' = r(\text{B})$ a pour affixe $3 + 4\text{i}$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -\sqrt{5} + \text{i}\sqrt{15}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un argument de a^n est $\dfrac{2n\pi}{3}$.
2. O appartient à la médiatrice de [AB].
3. OAB est un triangle rectangle en O.
4. Le cercle circonscrit à OAB a pour rayon 3.

EXERCICE 3

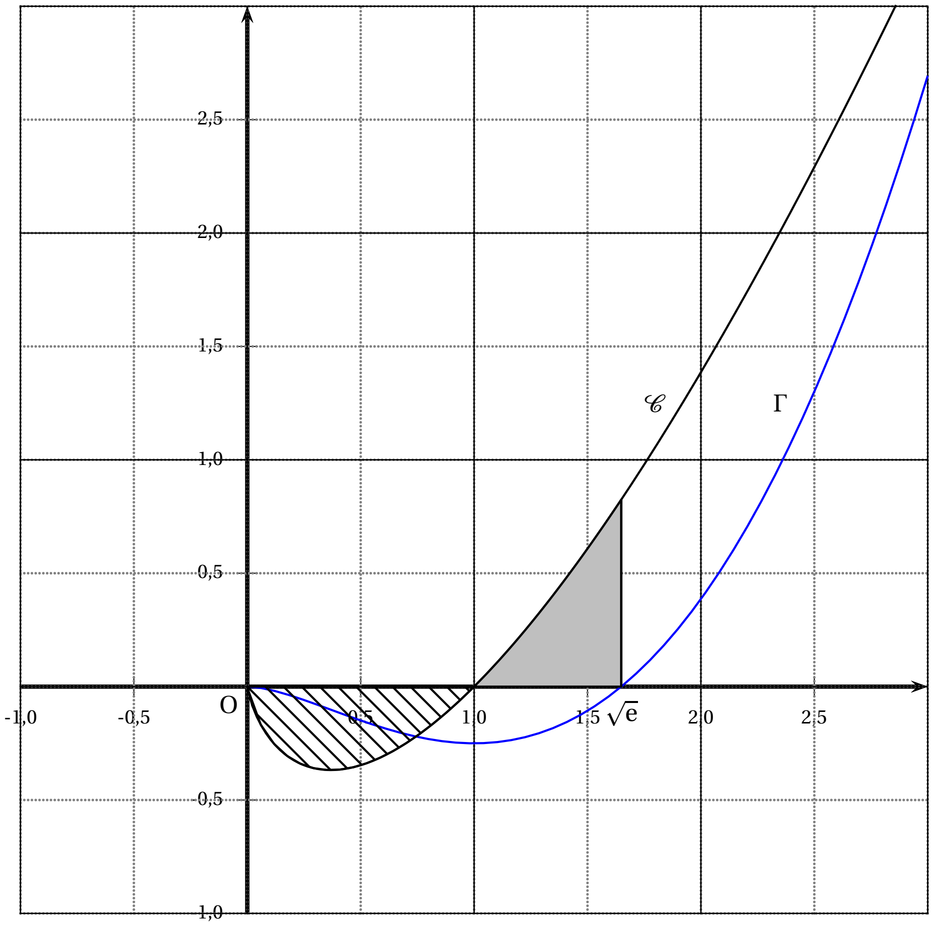
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et 2i.
On désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixes z telles que $|z - 2\text{i}| = |z - 1|$ et par (F) l'ensemble des points M, distincts de A et B, d'affixes z telles que
$\arg\left(\dfrac{z - 2\text{i}}{z - 1}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

1. (E) est un cercle.
2. Les points M de (F) décrivent un cercle sauf deux points.
3. Le point C d'affixe $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ appartient à (E) et (F).
4. (F) est aussi l'ensemble des points M tels que le complexe $Z = \dfrac{z - 2\text{i}}{z - 1}$ soit un nombre imaginaire pur.

EXERCICE 4

On donne les deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ ci-dessous.

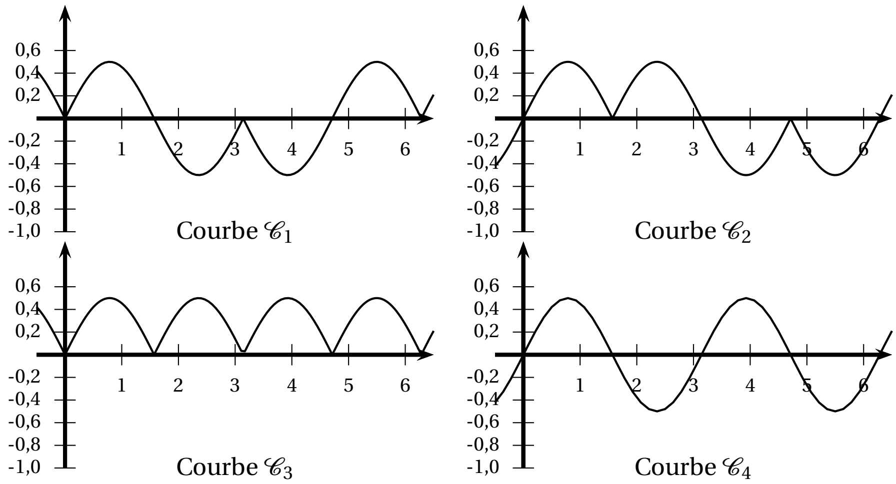
L'une de ces courbes représente une fonction f définie et continue sur $[0\ ;\ +\infty[$; l'autre représente une primitive F de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On admettra que Γ possède l'axe des abscisses pour tangente en O(0, 0) et que $\mathscr{C}$ possède l'axe des ordonnées pour tangente en ce même point.



1. Γ est la courbe qui représente f.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. L'aire de la surface hachurée est la même que celle de la surface grisée.
4. F est deux fois dérivable en 0 et $F''(0) = 0$.

EXERCICE 5

On considère quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$. On appelle respectivement $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ les courbes représentatives de ces fonctions.



Courbe $\mathscr{C}_1$ Courbe $\mathscr{C}_2$ Courbe $\mathscr{C}_3$ Courbe $\mathscr{C}_4$

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = f(x)$.
2. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)|$.
3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) = 0$.
4. $\mathscr{C}_4$ représente la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$, associe $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

EXERCICE 6

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On cherche à savoir si f est dérivable en 0.

   On tient pour cela le raisonnement suivant :

   « f est le produit de la fonction $x \longmapsto x$ avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies et continues sur $[0\ ;\ +\infty]$, mais la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Il s'ensuit que f n'est pas dérivable en 0 en tant que produit de deux fonctions dont l'une n'est pas dérivable en 0. »

   Ce raisonnement est exact.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n entier par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$. On admet que cette suite est bien définie ($u_n \neq 0$) et qu'elle est convergente. On appelle ℓ sa limite. On cherche à savoir si ℓ est un nombre rationnel ou non. Pour cela on tient le raisonnement suivant :

   « Soit $P(n)$ la phrase « u_n est un nombre rationnel ».

   Initialisation : $u_0 = 1$ est un nombre rationnel donc $P(0)$ est vraie.

   Soit p entier tel que $P(p)$ soit vraie. Montrons que $P(p+1)$ est vraie.

   D'après l'hypothèse de récurrence u_p est un nombre rationnel, il en est de même de $\dfrac{2}{u_p}$ ainsi que de $u_{p+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_p + \dfrac{2}{u_p}\right)$. Il s'ensuit que u_{p+1} est rationnel donc $P(p+1)$ est vraie.

   Conclusion : de ces deux assertions et d'après le principe de raisonnement par récurrence je déduis que pour tout n entier $P(n)$ est vraie. ℓ est alors la limite d'une suite de nombres rationnels, donc ℓ est lui-même un nombre rationnel. »

   Ce raisonnement est exact.

3. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A$(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B$(4\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et C$(7\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On veut prouver que A, B et C déterminent un plan. Pour cela on tient le raisonnement suivant :

« On a $\overrightarrow{AB}(3\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{AC}(6\ ;\ -1\ ;\ 2)$. Il s'ensuit : $AB = \sqrt{19}$, $AC = \sqrt{41}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 17$.

Comme $AB \times AC \neq \left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|$, les points A, B et C ne sont pas alignés, ils déterminent un plan. »

Ce raisonnement est exact.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{E}(\sin x)$ (E désigne la fonction « partie entière »). On cherche la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie dans un voisinage de 0. On utilise le changement de variable $X = \sin x$; on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$. Par suite, et d'après le théorème de composition des limites, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{E}(X) = 0$. »

Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x\ln(1+x) - 2\ln x}{x^2} = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$.

3. L'inéquation $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x + 2 \leqslant 0$ n'a pas de solution réelle.

4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+x^2\right)$ possède le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$. Soient f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-3x}$.

1. On a $f'(0) = 4$.

2. Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1$.

3. Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{3x}$.

4. Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3f(x) - \mathrm{e}^{3x} - 2}{9}$.

EXERCICE 9

On définit la suite (I_n) pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_1^{x\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_1 = \dfrac{1}{2}$.

2. La suite (I_n) est croissante.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n-1}}\right)$.

4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, une intégration par parties donne $(n-1)^2 I_n = 1 - n\mathrm{e}^{1-n}$.

EXERCICE 10

On considère les trois suites $u,\ v$ et w définies respectivement par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 5 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad w_n = v_n - u_n.$$

1. La suite w est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

2. La suite u est croissante.

3. Les suites u et v sont convergentes.

4. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$.

EXERCICE 11

On considère les suites u et v définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{-2}{u_n - 3} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.

2. La suite u est convergente.

3. v est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 + 2^n}$.

EXERCICE 12

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$. On considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$. On appellera $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant la fonction f_n dans un repère du plan.

1. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, les courbes $\mathscr{C}_n$ possèdent l'axe des ordonnées pour asymptote.

2. Soit $x \in]0~;~1[$. On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

3. Quelque soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, les courbes $\mathscr{C}_n$ possèdent une tangente commune au point d'abscisse 1.

4. Soient $x \in]1~;~+\infty[$ et $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_k(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 - x} \times \ln x$.

EXERCICE 13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules blanches et n boules noires.
On jette un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

— Si le résultat est pair, on prélève au hasard, successivement avec remise intermédiaire, deux boules de U_1.
— Si le résultat est impair on prélève au hasard, successivement sans remise intermédiaire, deux boules de U_2.

On appelle N l'évènement « obtenir deux boules noires ».
On désigne par $p(N)$ la probabilité de l'évènement N, $p_{U_1}(N)$ la probabilité de l'évènement N sachant que les deux boules tirées proviennent de U_1, $p_{U_2}(N)$ la probabilité de l'évènement N sachant que les deux boules tirées proviennent de U_2.

1. La probabilité d'obtenir deux boules noires de U_1 est $\dfrac{1}{8}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $p_{U_1}(N) = p_{U_2}(N)$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_{U_1}(N) = \lim_{n\to+\infty} p_{U_2}(N)$.
4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $p(N) = \dfrac{4n-3}{8(2n-1}$.

EXERCICE 14

Une usine fabrique des détecteurs de fumée. Ces détecteurs disposent chacun d'une durée de vie aléatoire (en mois) représentée par une variable aléatoire T.
Cette variable suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, dont la loi de densité est la fonction f_λ définie par : $f_\lambda(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et
$f_\lambda(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour $t > 0$.
Les tests indiquent qu'un détecteur donné a 1 chance sur 2 de tomber en panne à la fin de son premier mois de bon fonctionnement. En cas de panne, le détecteur défaillant est immédiatement remplacé par un détecteur neuf. Un contrôle est effectué chaque mois après l'installation du premier détecteur. On admet que le fonctionnement des détecteurs est indépendant d'un détecteur à un autre. On désire équiper une petite salle avec l'un de ces détecteurs de fumée.

1. $\lambda = \ln 2$.
2. La probabilité de changer au moins une fois le détecteur lors de l'un des deux premiers contrôles est égale à 1.
3. La probabilité de changer le détecteur une fois et une seule lors de l'un des cinq premiers contrôles est égale à $\dfrac{5}{32}$.
4. Pour tout entier supérieur ou égal à 1, la probabilité que le détecteur ne soit pas changé lors des n premiers contrôles est égale à $\dfrac{1}{2^n}$.

EXERCICE 15

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points A$(-1~;~2~;~4)$, B$(0~;~-2~;~3)$, C$(7~;~1~;~-1)$ et D$(-2~;~-2~;~-13)$.
On appelle P le plan médiateur de [AB], c'est-à-dire le plan contenant les points équidistants de A et de B ou aussi le plan perpendiculaire à [AB] contenant le milieu de [AB].
On appelle Q le plan médiateur de [CD].

1. Le vecteur de coordonnées $(8\ ;\ -1\ ;\ -5)$ est normal à Q.
2. Le plan P a pour équation $x+4y+z+4=0$.
3. A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre $\Omega(-1\ ;\ 2\ ;\ -5)$.
4. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{A}M} \cdot \overrightarrow{\text{B}M} = 0$ est la sphère de diamètre [AB].

EXERCICE 16

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère les ensembles P, Q et R d'équations respectives

$$P : x+y=0 \quad ; \quad Q : 2x-y-z-1=0 \quad ; \quad R : z=1.$$

1. P est une droite.
2. L'ensemble des points appartenant à la fois à P et à R est une droite.
3. P et Q sont perpendiculaires.
4. P, Q et R se coupent au point $\text{A}\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.