

# Concours d'entrée FESIC mai 2004

## EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal .

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  :

$$a = -2 - 2i \quad ; \quad b = 2 \quad ; \quad c = 2 + 4i \quad ; \quad d = -2 + 2i.$$

**a.** ABCD est un parallélogramme.

**b.** Le point E, image de C par la rotation de centre B et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ , est un point de l'axe des abscisses.

**c.** Soient  $f = 6i - 4$  et F le point d'affixe  $f$ .

Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D.

**d.** Soient  $g = -2i$  et G le point d'affixe  $g$ .

Le triangle CDG est rectangle et isocèle en D.

## EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal .

**a.** La partie réelle de  $(1 + 2i)^5$  est 41.

**b.** On considère trois points quelconques A, B et C du plan d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

L'écriture  $(b - c) = i(a - c)$  caractérise une homothétie de centre C et de rapport  $i$ .

**c.**  $(1 + i)^{20}$  est réel.

**d.** L'équation  $z^4 - 1 = 0$  possède quatre solutions distinctes dans  $\mathbb{C}$ .

## EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal .

Soient A le point d'affixe  $a = 1 - i$  et B le point d'affixe  $b = 2i - 3$ .

À tout point M d'affixe  $z$ ,  $zb$ , on associe le point M' d'affixe

$$Z = \frac{z - 1 + i}{z + 3 - 2i}.$$

**a.** L'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que Z soit réel est le segment [AB].

**b.** Pour tout  $z$  différent de  $-3 + 2i$  et de  $-3 - 2i$ , on obtient la forme algébrique

de Z par le calcul :  $\frac{(z - 1 + i)(z + 3 + 2i)}{(z + 3 - 2i)(z + 3 + 2i)}$ .

- c. L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $M'$  soit un point de l'axe des ordonnées est le cercle d'équation  $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ , sauf le point B.
- d. Soit  $z_0$  une solution de l'équation  $\frac{z-1+i}{z+3-2i} = i$  (on admet l'existence d'une telle solution).  
Le point  $M_0$  d'affixe  $z_0$  est un point de la médiatrice de  $[AB]$ .

#### EXERCICE 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0 \\ \cos x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

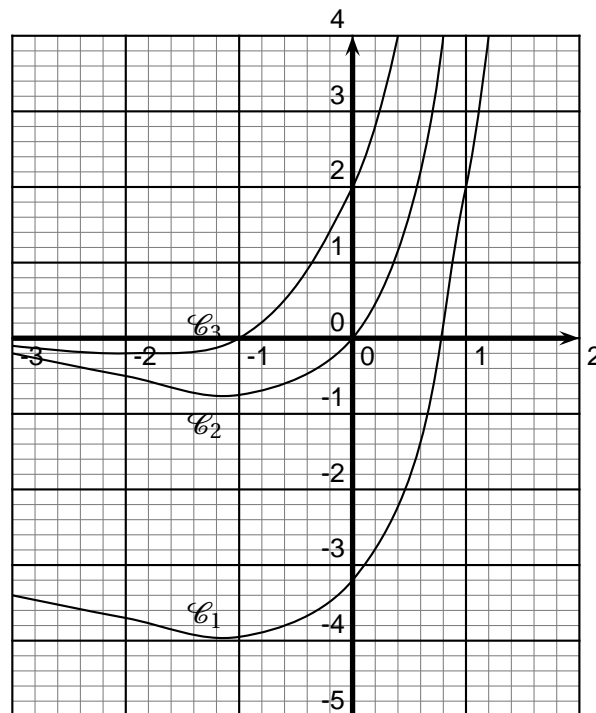
On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique dans un repère du plan. Soit  $\Gamma$  la représentation graphique de la fonction exponentielle ( $x \mapsto e^x$ ) dans le même repère.

- a. Dans la portion du plan correspondant aux points d'abscisses négatives,  $\mathcal{C}_f$  est l'image de  $\Gamma$  par la symétrie axiale dont l'axe de symétrie est l'axe des abscisses.
- b.  $f$  est continue en 0.
- c.  $f$  est dérivable en 0.
- d. L'équation  $f(x) = 0$  possède une et une seule solution dans l'intervalle  $] -\infty ; \pi ]$ .

#### EXERCICE 5

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ . L'une d'elles est la représentation d'une fonction, les deux autres sont les représentations de deux de ses primitives. On note :

- $f_1$  la fonction représentée par  $\mathcal{C}_1$  ;
- $f_2$  la fonction représentée par  $\mathcal{C}_2$  ;
- $f_3$  la fonction représentée par  $\mathcal{C}_3$  ;



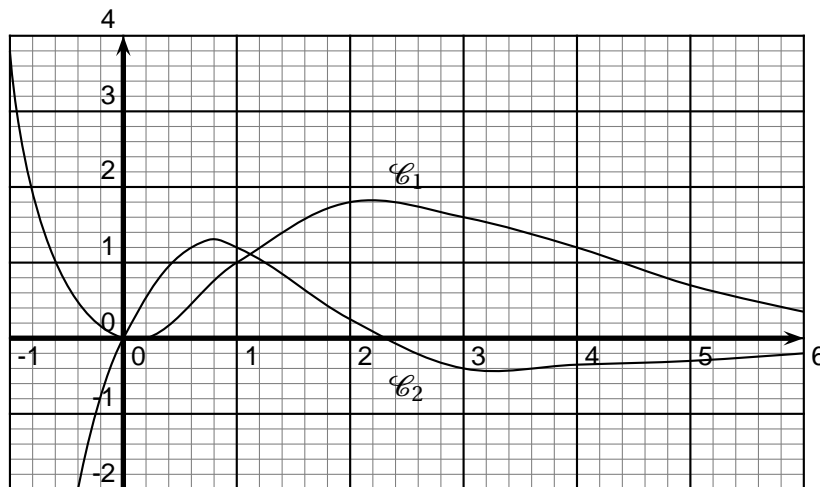
- a.  $f_1$  est une primitive de  $f_2$ .
- b.  $f_3$  est la dérivée de  $f_1$ .
- c. On considère la surface plane limitée par la courbe  $\mathcal{C}_3$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = -1$ . L'aire, en unités d'aire, de cette surface est  $f_2(-1)$ .
- d. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Soient  $M_1$  le point de  $\mathcal{C}_1$  d'abscisse  $x$  et  $M_2$  le point de  $\mathcal{C}_2$  de même abscisse.  
La distance  $M_1M_2$  est constante.

### EXERCICE 6

On donne ci-dessous la représentation graphique de deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

- $\mathcal{C}_1$  représente une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ ;
- $\mathcal{C}_2$  représente la fonction  $f'$ , dérivée de  $f$ .

On appelle  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$ , c'est-à-dire la dérivée de  $f'$ .



- a. Toute primitive de  $f$  est croissante sur  $[-1 ; 6]$ .  
 b. La courbe représentant la fonction  $f''$  passe par le point de coordonnées  $(0 ; 0)$ .  
 c. La fonction  $f''$  s'annule trois fois sur  $[-1 ; 6]$ .  
 d. On considère la surface plane limitée par la courbe  $\mathcal{C}_2$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .  
 L'aire de cette surface est égale à celle d'un carré unité.

### EXERCICE 7

- a. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x) = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$$

La dérivée  $f'$  de  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f'(x) = 2 \sin(\ln x)$ .

b.  $7 \ln(\sqrt{2} + 1) + 2 \ln(3 + \sqrt{2}) - \ln(11 + 6\sqrt{2}) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1) = 0$ .

c.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \frac{1}{2} \ln 2$ .

d.  $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx = 4 - 2\sqrt{e}$ .

### EXERCICE 8

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{x^2} f(t) \, dt.$$

- a. L'image de  $\mathbb{R}$  par  $f$  est  $]0 ; 1]$ .
- b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq g(x) \leq x^2 - x$ .
- c. Dans un repère du plan et pour  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $g(x_0)$  représente l'aire de la surface plane limitée par la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = x_0$  et  $x = x_0^2$ .
- d.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = f(x^2) - f(x)$ .

### EXERCICE 9

Soient  $l \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle à termes tous strictement positifs.

Pour les items **a.**, **b.** et **c.**, on suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

- a.  $l$  est strictement positif.
- b. Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $l$  soit une valeur approchée de  $u_n$  à  $10^{-3}$  près.
- c. La suite  $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , converge vers  $\ln l$ .
- d. On suppose dans cette question que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \ln u_n$  et que  $u_0 > u_1$ .

On ne suppose pas que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

### EXERCICE 10

On considère la suite complexe  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $z_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$  dans le plan complexe d'origine  $O$ .

- a. La suite  $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .
- b. Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , les triangles  $OM_nM_{n+1}$  sont rectangles.
- c.  $M_n$  appartient à l'axe des abscisses si et seulement si  $n$  est un multiple de 4.
- d. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$ .

### EXERCICE 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

On considère, dans ce repère, les points  $A(1 ; -1)$ ,  $B(5 ; 3)$  et  $I$  milieu de  $[AB]$ .

Soit  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de points définie par :

- $G_0 = O$ ;
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_{n+1}$  est le barycentre du système  $\{(G_n ; 2) ; (A ; 1) ; (B ; 1)\}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $(x_n ; y_n)$  les coordonnées de  $G_n$ .

**a.**  $G_1, G_2$  et  $G_3$  sont alignés.

**b.** Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_{n+1}$  est l'image de  $G_n$  par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

**c.** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = x_n - 3$ , est une suite géométrique de premier terme -3 et de raison  $\frac{1}{2}$ .

**d.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = 3 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ .

### EXERCICE 12

On considère une droite graduée  $\Delta$  d'origine O.

On considère la suite de points  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie ainsi :

- $G_0$  a pour abscisse 0 et,
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_{n+1}$  est le barycentre du système  $\{(G_n ; 2) ; (H_n ; 3)\}$  ;

et la suite de points  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie ainsi :

- $H_0$  a pour abscisse 1 et,
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_{n+1}$  est le barycentre du système  $\{(G_n ; 3) ; (H_n ; 2)\}$ .

On appelle respectivement  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites obtenues en notant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  l'abscisse de  $G_n$  et  $h_n$  l'abscisse de  $H_n$ .

**a.** La suite  $(g_n - h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{-1}{5}$ .

**b.** La suite  $(g_n + h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante.

**c.** Les deux suites  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers la même limite.

**d.** Les suites  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.

### EXERCICE 13

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

On effectue  $n$  tirages successifs d'une boule, avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle  $p$  la probabilité associée à cette expérience.

On définit de plus les évènements suivants :

- On appelle  $A_n$ , l'évènement : « Les  $n - 1$  premiers tirages ont donné la même boule et la  $n$ -ième boule tirée est différente des précédentes » ;
- Lorsque  $k$  est un entier compris entre 1 et  $n$ , on appelle  $B_k$ ,  $V_k$  et  $R_k$  les évènements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du  $k$ -ième tirage.

- a.  $p(B_1 \cap \overline{B_2}) = 1 - p(V_1 \cap \overline{V_2}) - p(R_1 \cap \overline{R_2})$ .
- b.  $p(A_2) = \frac{2}{3}$ .
- c. Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :  $p(A_n) = \frac{2}{3^{n-1}}$ .
- d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [p(A_2) + p(A_3) + \dots + p(A_n)] = \frac{1}{3}$ .

#### EXERCICE 14

La durée de vie d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

On utilisera, pour les calculs, l'approximation  $\ln 2 \approx 0,7$ .

a. La densité de probabilité associée à cette loi est la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que :

- $f(t) = 0$  si  $t \notin [0; 5]$  et
- $f(t) = 5e^{-5t}$  si  $t \in [0; 5]$ .

b. On suppose que 50 % des clients ont été dépannés durant la garantie. La durée de cette garantie est de 3 ans et demi environ.

c. On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manières indépendantes et on appelle  $X$  le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.

La probabilité d'avoir  $X \geq 1$  est  $p(X \geq 1) = e^{-4}$ .

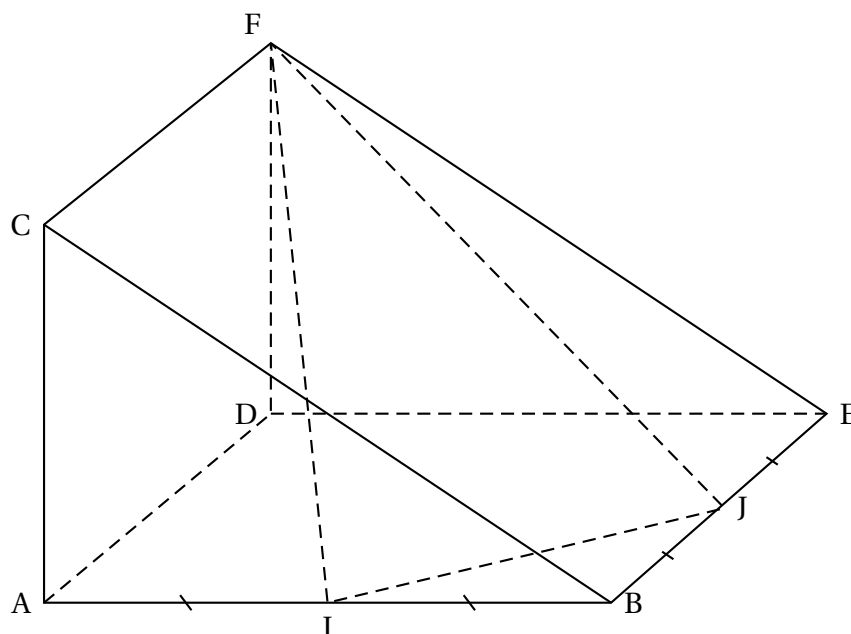
d. On considère à nouveau un lot de 10 moteurs fonctionnant de manières indépendantes et on appelle  $X$  de la même façon qu'au c., le nombre de moteurs qui n'ont pas de panne pendant les deux premières années.

L'espérance de la variable aléatoire  $X$  est  $E(X) = 10e^{-\frac{2}{5}}$ .

#### EXERCICE 15

On considère le prisme ABCDEF ci-dessous.

Sur ce prisme, I est le milieu de [AB], J est le milieu de [BE], et ABED et ADFC sont des carrés.



On rapporte l'espace au repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $G_n$  le barycentre du système  $\{(A; 1); (B; 1); (E; 1); (D; n)\}$ .  
(On notera que  $G_n$  existe quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $1 + 1 + 1 + n \neq 0$ .)

**a.** Le plan (IJF) est l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que :  $2x - 3z - 1 = 0$ .

**b.** La droite  $\Delta$  passant par D et orthogonale au plan (IJF) est l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que :

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = \frac{3}{2}k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

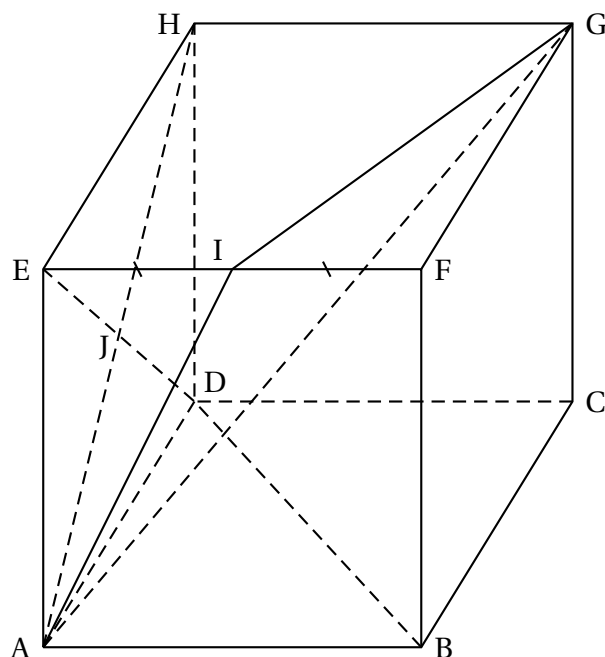
**c.**  $G_3$  appartient au segment [BD].

**d.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble des points  $M$  tels que  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME} + n\overrightarrow{MD}\| = n+3$  est la droite (BD).

### EXERCICE 16

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous, où I est le milieu de [EF] et J est le centre de la face ADHE.





On rapporte l'espace au repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

- a. L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $y = -x + 1$  est le plan (DBH).
- b. Le plan (AIG) est l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que :  $2x - y - z = 0$ .
- c. La droite (BJ) est orthogonale au plan (AIG).
- d. La distance, en unités de repère, de B au plan (AIG) est 2.