

Concours Fesic mai 2006

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification.

+1 si bonne réponse, -1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'un point pour un exercice entièrement juste.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit la fonction f qui, à tout point M d'affixe z , z différent de 1, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{2z+1}{z-1}.$$

1. f possède deux points invariants conjugués.
2. L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est l'axe des abscisses.
3. L'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' = 2$ est un cercle.
4. À tout point M' du plan d'affixe z' , on peut associer un point M d'affixe z tel que $f(M) = M'$ sauf au point M' d'affixe $z' = 2$.

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les complexes z_1 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \bar{z}_1$ et $z_3 = 1 + i$.

1. $\left| \frac{z_3^8 \times z_1^9}{z_2^{11}} \right| = 4$.
2. $\frac{z_1^4 \times z_2^7}{z_3^6}$ est un nombre réel.
3. $(z_1 - z_3)^4 = 28 - 16\sqrt{3}$.
4. L'ensemble des points M d'affixe z telles que $\arg(z) = \arg(z_3)$ est la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

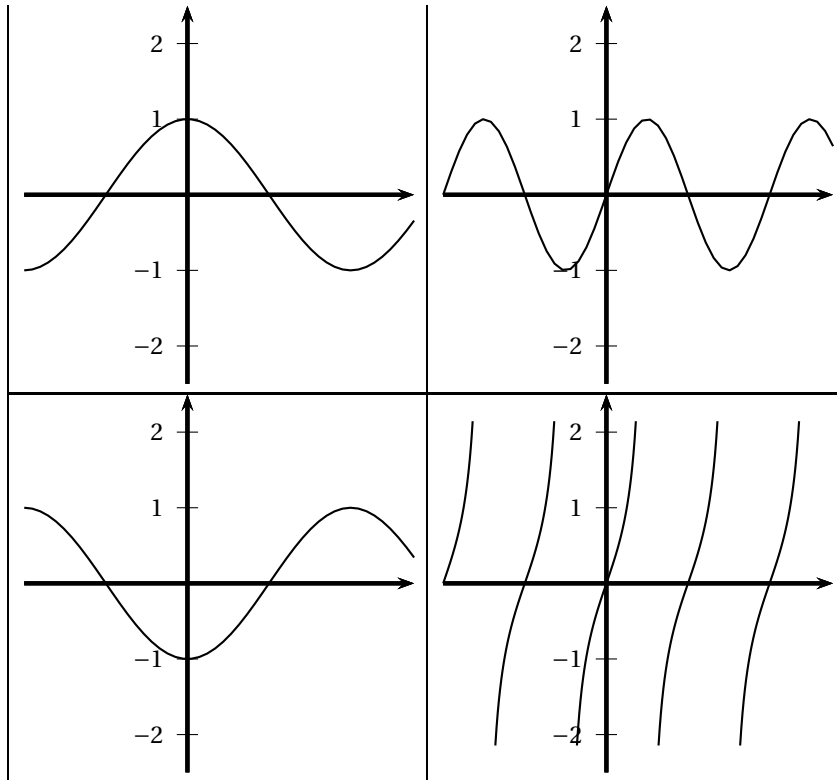
On considère le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$. On appelle :

- B le point d'affixe b , image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- C le point d'affixe c , milieu de [OA],
- D le point d'affixe d donnée par $d - c = \frac{1}{2}(b - a)$,
- E le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

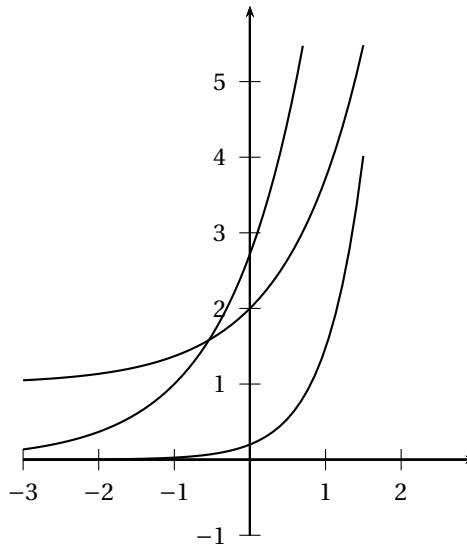
1. Le point B a pour affixe $b = 3\sqrt{3} + i$.
2. D est le milieu de [OB].
3. E est le barycentre de $\{(B, 1); (C, 2)\}$.
4. La droite (OE) est perpendiculaire à (AB).

EXERCICE 4

1. La courbe représentant la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est la courbe \mathcal{C}_2 .



2. On considère les trois courbes ci-dessous : la courbe représentant la fonction $x \mapsto e^{x+1}$ est \mathcal{C}_1 .



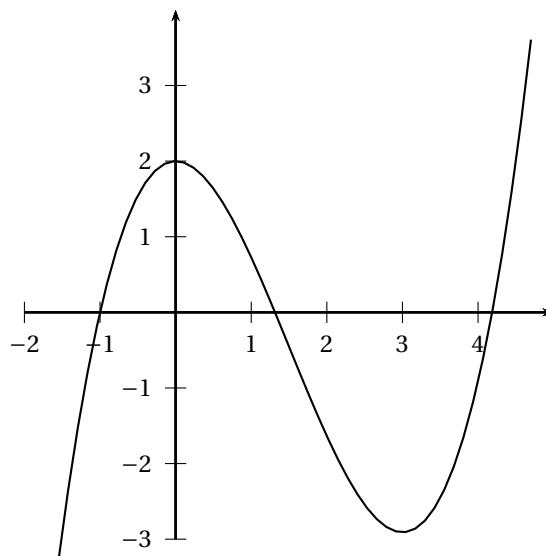
3. On considère la fonction f représentée par la courbe \mathcal{C} ci-dessous et la fonction F définie sur $[0; 4]$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

F est croissante sur $[0; 4]$.

4. On considère les mêmes fonctions f et F qu'au c.

La fonction F est deux fois dérivable sur $[0; 4]$ et vérifie $F''(0) = 0$.

**EXERCICE 5**

- Soient f , g et h trois fonctions définies sur \mathbb{R} . On suppose que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 5$. Alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On appelle (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère du plan. (\mathcal{C}) possède une asymptote d'équation $x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}} f(x) = 0$.
- La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x}{2}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Soient f la fonction définie par $f(x) = 2 \ln x$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère du plan. (\mathcal{C}) possède au point d'abscisse -1 une tangente d'équation $y = -2x - 2$.

EXERCICE 6

- Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_1^n e^{-t^2} dt$. On veut prouver que la suite u est convergente. On considère pour cela le raisonnement suivant :
 « Je choisis $m = 0$ et $M = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1 ; n]$, on a $t^2 \geq t$, donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Il s'ensuit que $0 \leq u_n \leq \int_1^n e^{-t} dt$, soit $0 \leq u_n \leq [-e^{-t}]_1^n$, soit enfin $0 \leq u_n \leq e^{-1} - e^{-n} \leq 1$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite apparaît bornée par $m = 0$ et $M = 1$.
 Soit de plus $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1 ; n]$. u_n représente donc l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$, $x = n$, $y = 0$ et la courbe représentant cette fonction. Cette aire augmente quand n augmente, ce qui se traduit par le fait que la suite u est croissante.
 Conclusion : u est croissante et majorée par 1 donc la suite u est convergente. »
 Ce raisonnement est exact.

2. Soit f la fonction définie sur $[0; \ln 2]$ par : $f(x) = (2x - 1)e^x$. On appelle (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère du plan. On cherche à calculer l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = \ln 2$, $y = 0$ et la courbe (\mathcal{C}) .

On considère pour cela le raisonnement suivant (et le renseignement $\ln 2 \approx 0,7$) :

« La fonction F définie par $F(x) = (2x - 3)e^x$ est une primitive de f sur $[0; \ln 2]$. F est en effet dérivable sur $[0; \ln 2]$ et $F'(x) = 2e^x + (2x - 3)e^x = (2x - 1)e^x$.

On a : $\int_0^{\ln 2} f(x) dx = [(2x - 3)e^x]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 3) \times 2 - (-3) = 4\ln 2 - 3 \approx -0,2$.

Comme le résultat est négatif, c'est que l'aire cherchée est la valeur absolue de ce résultat, soit 0,2 unité d'aire ».

Ce raisonnement est exact.

3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 + x)^{10}$. On cherche une approximation de $f(0,001)$. On considère pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour x réel, $f'(x) = 10(1 + x)^9$ et la courbe représentant f possède une tangente au point d'abscisse 0 d'équation $y = xf'(0) + f(0)$, soit $y = 10x + 1$. On en déduit que $f(0,001) \approx 10 \times 0,001 + 1$, soit $f(0,001) \approx 1,01$. »

Ce raisonnement est exact.

4. Soit D l'ensemble des valeurs réelles x telles que $\sin x \neq 0$. Soit f la fonction définie sur D par : $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. On veut prouver que f est décroissante sur D . On considère pour cela le raisonnement suivant :

« f est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont dérivables sur D et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D . On en déduit que f est dérivable sur D .

Pour $x \in D$, on a $f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$. Pour tout $x \in D$, on a $f'(x) < 0$.

Comme le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction, c'est que f est strictement décroissante sur D . »

Ce raisonnement est exact.

EXERCICE 7

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = e^{-x} \sin x$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

- f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin x \cos x$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2}e^{-n\pi}(e^{-\pi} + 1)$.
- f est l'unique solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.
- Si g est une solution de (E), la courbe représentant g possède une tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est donnée par $y = (1 - 2x)g(0)$.

EXERCICE 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle D_f l'ensemble de définition de f .

- $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit g une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R} - \left\{0; \frac{-2}{3}\right\}$ telle que quel que soit $x \in D_g$, $g'(x) = \frac{3}{3x+2} - \frac{1}{x}$. f et g sont égales à une constante additive près.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -\frac{2}{5}$.
4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x f(x) = 0$.
-

EXERCICE 9

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et les fonctions f_1 et f_2 définies sur \mathbb{R} par $f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$. On appelle \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

- \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se coupent au point $A(\ln \lambda; 3\lambda)$.
 - Quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, \mathcal{C}_1 est au-dessus de \mathcal{C}_2 .
 - Il existe un point B en lequel \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 possèdent la même tangente.
 - Lorsque λ est supérieur à 1, l'aire de la portion du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et limitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln \lambda$ est, en unités d'aire, $\frac{(\lambda - 1)^3}{3}$.
-

EXERCICE 10

On considère une suite v strictement croissante dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $[0; \pi]$.

On définit les suites c et s pour $n \in \mathbb{N}$ par $c_n = \cos(v_n)$ et $s_n = \sin(v_n)$.

- La suite v converge vers π .
 - La suite c est croissante.
 - La suite s est périodique.
 - Les suites c et s sont adjacentes si et seulement si la suite v converge vers $\frac{\pi}{4}$.
-

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la suite (z_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$ et on appelle A_n le point d'affixe z_n .

- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, A_n appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
 - Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} - z_n| = |z_1 - 1|$.
 - La suite (z_n) est périodique de période 5.
 - $\sum_{k=0}^4 z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_4 = 0$.
-

EXERCICE 12

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) u_n$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \frac{n}{(n-1)!}$.
- La suite u est croissante.

3. Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on a $n \geq 2$, alors on aura : $0 \leq u_n \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.
4. La suite u est convergente et de limite nulle.

EXERCICE 13

On considère un espace probabilisé fini (Ω, p) dans lequel un évènement A a les trois possibilités A_1, A_2 , et A_3 deux à deux distinctes de se produire et un évènement B a les deux possibilités B_1 et B_2 distinctes de se produire. Le tableau suivant donne en pourcentages la probabilité de certains évènements de se produire par rapport à l'univers Ω .

	A_1	A_2	A_3	Total / A
B_1		20		
B_2	30			
Total / B			10	100

On donne aussi les renseignements suivants : $p(A_2) = 60\%$ et $p_{B_1}(A_3) = \frac{1}{6}$.

1. A_1 et B_1 sont incompatibles.
2. La probabilité d'obtenir B_1 est 24 %.
3. Si A_3 est réalisé, la probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.
4. La probabilité d'obtenir A_3 et B_1 est 4 %.

EXERCICE 14

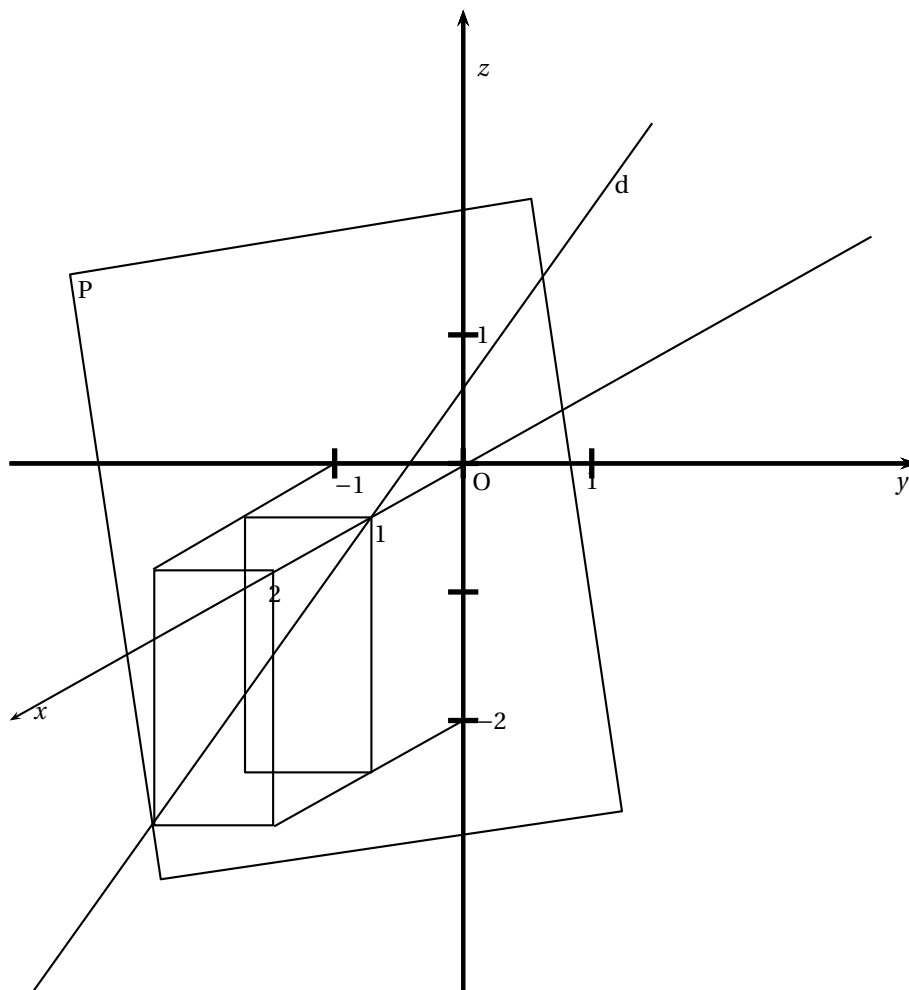
Une rampe lumineuse est constituée d'ampoules bleues, rouges ou jaunes provenant de deux usines U_1 et U_2 . U_1 produit 60 % de ces ampoules. La durée de vie en années de chacune de ces ampoules suit une loi exponentielle dont les paramètres sont les suivants :

	Ampoules bleues	Ampoules rouges	Ampoules jaunes
Ampoules de U_1	$\lambda_{B_1} = 0,25$	$\lambda_{R_1} = 0,20$	$\lambda_{J_1} = 0,15$
Ampoules de U_2	$\lambda_{B_2} = 0,20$	$\lambda_{R_2} = 0,15$	$\lambda_{J_2} = 0,10$

1. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans sachant qu'elle vient de U_1 est $0,6(1 - e^{-1})$.
2. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans est $1 - 0,6e^{-1,25} - 0,4e^{-1}$.
3. La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre 5 et 10 ans est $0,6(e^{-0,75} - e^{-1,5}) + 0,4(e^{-0,5} - e^{-1})$.
4. La demi-vie en années d'une ampoule jaune de U_2 est $4 \ln 2$.

EXERCICE 15

Le schéma ci-dessous représente une situation de l'espace dans un repère approprié dont le centre est un point O. On sait que la droite d est orthogonale au plan P. On appelle A le point de coordonnées $(2 ; -1 ; -2)$. P



1. Le plan P a pour équation cartésienne $x - y - 2z - 1 = 0$.

2. La droite d a pour équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3. La demi-droite [OA) a pour équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

4. La sphère de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ est cachée par P.

EXERCICE 16

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par P et Q les plans d'équations respectives $P: \begin{cases} y - x = \sin^2 \theta \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$,

$Q: \begin{cases} z - y = \cos^2 \theta \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$.

On appelle Δ la droite d'intersection de ces deux plans.

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les plans P et Q sont orthogonaux.

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est contenue dans le plan d'équation $\begin{cases} z - x = 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la droite Δ est orthogonale au plan d'équation $x + y + z = 0$.
4. Il existe un réel θ tel que Δ soit parallèle au plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .