∽ Concours Fesic –Puissance Alpha 27 avril 2019 ∾
Durée : 2 h

Durée de l'épreuve :
Présentation et méthodologie de l'épreuve de Mathématiques
- 2 *h.*
- 16 *exercices proposés* 12 *exercices à traiter au choix.*
- *Chaque exercice comporte* 4 *propositions. Chaque exercice est indépendant des autres exercices proposés.*
- *Les exercices proposés se présentent sous la forme de QCM de type Vrai ou Faux.*

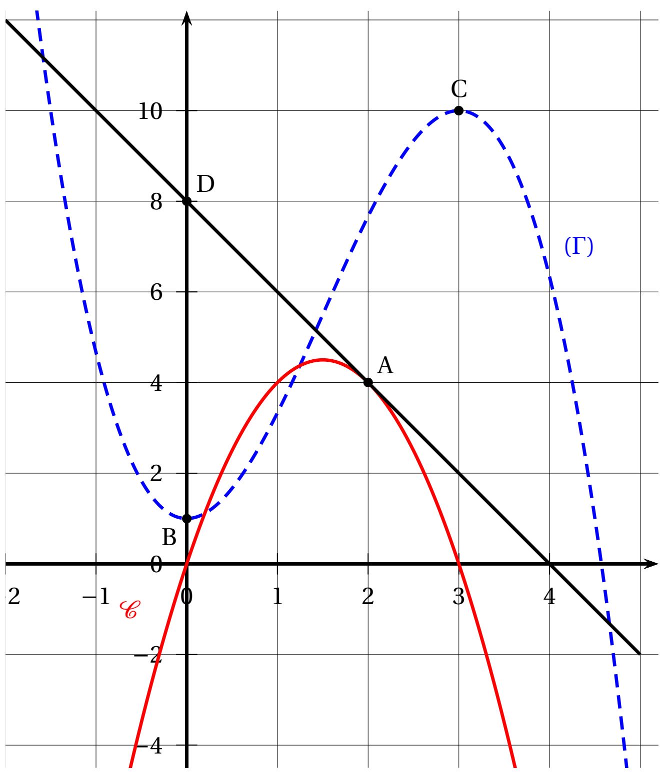
Présentation
Cette épreuve a pour but d'évaluer votre capacité à analyser un problème donné, et à sélectionner les outils calculatoires et ou graphiques adéquats pour le résoudre. La connaissance de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse seront donc de mise pour aborder cette épreuve.

Principe et objectifs de l'épreuve
- *Cette épreuve a pour but d'évaluer l'étendue de vos connaissances dans le domaine des mathématiques, et votre capacité à mener des études analytiques, algébriques et géométriques.*
- *Les* 16 *exercices proposés couvrent l'ensemble du programme de Terminale S, de façon à ce que chaque élève puisse sélectionner des exercices dont le programme a déjà été abordé au sein de son lycée.*

Évaluation de l'épreuve
- *L'évaluation est basée sur un bonus/malus : une bonne réponse rapporte* 1 *point, une mauvaise réponse retire* 0,5 *point, et l'absence de réponse équivaut à* 0 *point.*
- *Pour un même exercice, si les* 4 *réponses de l'élève sont correctes, alors il sera attribué automatiquement* 1 *point supplémentaire.*

EXERCICE 1
Un peu de lecture graphique

Dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne les points A(2; 4), B(0; 1), C(3; 10), D(0; 8).
On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par la courbe $\mathcal{C}$ et F une primitive de f représentée par la courbe en pointillée (Γ).
A est un point de la courbe $\mathcal{C}$, B et C sont deux points de la courbe (Γ). La droite (AD) représente la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.



a) La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0; 3]$.

b) $f'(2) = -3$.

c) Le coefficient directeur de la tangente à (Γ) au point d'abscisse $x = 2$ est égal à 4.

d) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$.

EXERCICE 2
Quelques questions de logique

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f, g, h trois fonctions définies sur un même intervalle $I = [a\,;\,b]$.

a) Si, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si les fonctions f et h admettent toutes les deux une limite finie lorsque x tend vers a, alors la fonction g admet elle aussi une limite finie lorsque x tend vers a.

b) Si, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) < g(x)$ et s'il existe deux nombres réels L et L' tels que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L'$ alors $L \leqslant L'$.

c) Si la fonction f est continue en $x = a$, alors la fonction f est dérivable en $x = a$.

d) La réciproque du **c)** est fausse.

EXERCICE 3
Un peu de géométrie avec le nombre d'or :

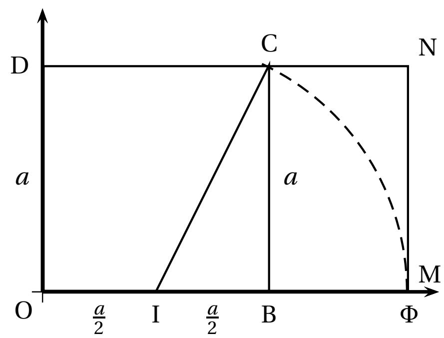
Soit a un nombre réel strictement positif. Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, on pose B le point de coordonnées $(a\,;\,0)$, C le point de coordonnées $(a\,;\,a)$ et I le milieu du segment [OB].
On construit le quatrième sommet D du carré OBCD, M le point de la demi-droite [OB) tel que IM=IC et N le quatrième sommet du rectangle OMND.
On pose Φ l'abscisse du point M.
On appelle **nombre d'or** φ, l'unique solution positive de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$.
Un **rectangle est dit d'or** si le rapport entre la longueur L et la largeur l est égal au nombre d'or c'est-à-dire si $\dfrac{L}{l} = \varphi$.

a) Si $a = 1$, alors $\Phi = \varphi$

b) Si $a = 1$, alors $\Phi = 1 - \dfrac{1}{\Phi}$

c) OMND est un rectangle d'or

d) $\cos\left(\widehat{\text{BIC}}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

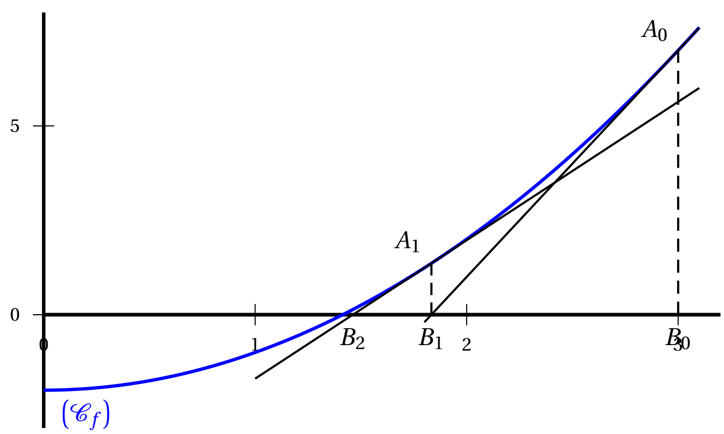


EXERCICE 4
Un peu de lecture graphique

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$ de courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et b_0 le nombre réel 3.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 2}{2v_n}$ et $v_0 = b_0 = 3$.

On pose B_0 le point de coordonnées $(b_0\,;\,0)$ et A_0 le point de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ d'abscisse b_0.
La tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point A_0 coupe l'axe des abscisses au point B_1 de coordonnées $(b_1\,;\,0)$.
A_1, est le point de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ d'abscisse b_1, et B_2 le point d'intersection de la tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point A_1, avec l'axe des abscisses.
On recommence le même raisonnement et on pose, pour tout entier naturel n, b_n l'abscisse du point B_n.



a) Pour tout nombre réel α, la tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse α, a pour équation $y = 2\alpha x + \alpha^2 - 2$.

b) $b_1 = \dfrac{11}{6}$.

c) Pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^2 - 2$.

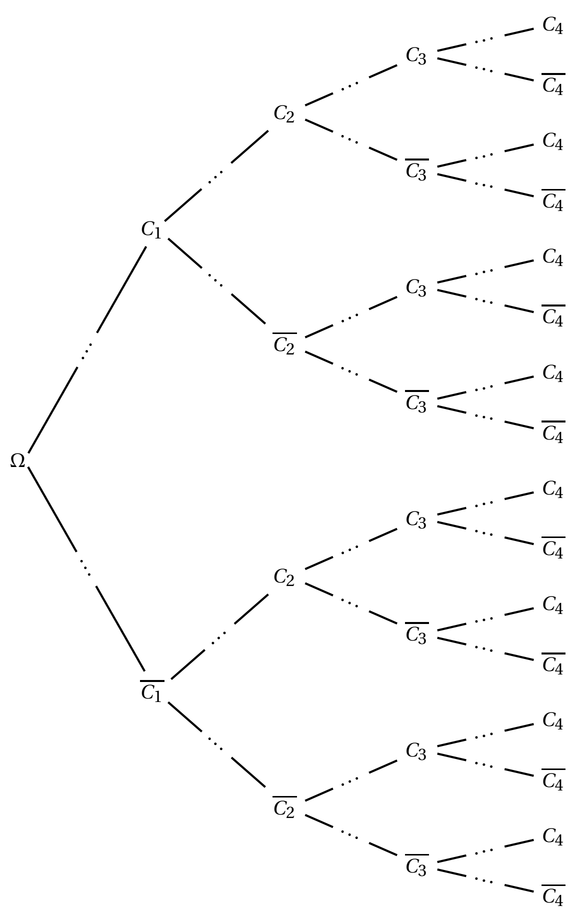
d) Soit N un entier naturel non nul. Les algorithmes suivants permettent de calculer le N−ième terme de la suite (v_n).

Variables	K est un nombre entier V est un nombre réel N est un nombre entier
Initialisation	$V \leftarrow 3$
Traitement	Lire N Pour K variant de 2 à $N+1$ Début du Pour $V \leftarrow \dfrac{V^2+2}{2V}$ Fin du Pour
Sortie	Afficher V

Variables	K est un nombre entier V est un nombre réel N est un nombre entier
Initialisation	$V \leftarrow 3$ $K \leftarrow 1$
Traitement	Lire N Tant que $K < N+1$ faire Début du Tant que $V \leftarrow \dfrac{V^2+2}{2V}$ $K \leftarrow K+1$ Fin du Tant que
Sortie	Afficher V

EXERCICE 5
Probabilités conditionnelles

À l'exercice de probabilité du concours Puissance Alpha de l'année dernière, 4 affirmations a), b), c) et d) étaient proposées.
La probabilité que l'élève réponde correctement à la première affirmation était de 0,8.
Si l'élève répondait correctement à une affirmation il avait 9 chances sur 10 de répondre correctement à la suivante. En revanche, si l'élève se trompait sur une affirmation, il avait 7 chances sur 10 de continuer de se tromper.
i est un entier naturel compris entre 1 et 4 et C_i est l'évènement « l'élève répond correctement à l'affirmation n° i ».



a) La probabilité de répondre correctement aux 4 affirmations est égale à $p = 0,8 \times 0,9^4$.

b) La probabilité de répondre correctement à l'affirmation b) est égale à $p' = 0,78$.

c) La probabilité de répondre correctement à l'affirmation a) sachant qu'on a répondu correctement à l'affirmation b) est égale à $p'' = 0,9$.

d) La probabilité de répondre correctement aux affirmations b), c) et d) est égale à $0,9^3$.

EXERCICE 6
Calculs d'intégrales

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$.

c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\left(\mathrm{e}^2-1\right)$.

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}-1$.

EXERCICE 7
Calculs de limites

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-x+1}-x = 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3\mathrm{e}^x+1}{2x+5} = \frac{1}{2}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n$.
Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

c) La suite (u_n) diverge.

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

EXERCICE 8
Petite étude de fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}}$ de courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et Δ la droite d'équation $y = 1$.

a) Pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}*$, $f'(x) = \left(\dfrac{2-x}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}}$.

b) $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet la droite Δ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

d) L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}*$.

EXERCICE 9
Petite étude de fonction ln

Soit f la fonction définie sur $I =]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ de courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$.

a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

b) Pour tout nombre réel x, de l'intervalle I, on a $f'(x) = \dfrac{x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln(x))^2}$.

c) La fonction f est strictement croissante sur I.

d) $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet la droite Δ d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

EXERCICE 10
Petite étude de suite

Soit f la fonction définie sur $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - 2\ln(x)$ et Φ la fonction définie sur $J = \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}}\ ;\ +\infty\right[$ par $\Phi(x) = \sqrt{1+8\ln(x)}$.
On pose (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \Phi(u_n)$.
On rappelle, dans toute la suite de l'exercice, que $\ln(2) \approx 0,7$, $\ln(3) \approx 1,1$ et $\ln(4) \approx 1,4$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une x_0 appartient à l'intervalle $[3\,;4]$.

c) $x_0 = \Phi(x_0)$.

d) Pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 3$.

EXERCICE 11
Notions de base sur les nombres complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

a) $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^3 = 8\mathrm{i}$.

b) La forme exponentielle de $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$ est $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Soit f la transformation complexe du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 3\mathrm{i}$ associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\overline{z}+\mathrm{i}}{\overline{z}+3\mathrm{i}}$.

c) L'équation $\left|z'\right| = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}$.

d) L'équation $z' = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 12
Utilisation des nombres complexes en géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
A, B, C et D sont les points du plan complexe d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{C}} = 3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{D}} = \overline{z_{\mathrm{C}}}$.
Le point E, d'affixe z_{E} est le symétrique du point D par rapport au point O.

a) $z_{\mathrm{E}} = -3-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

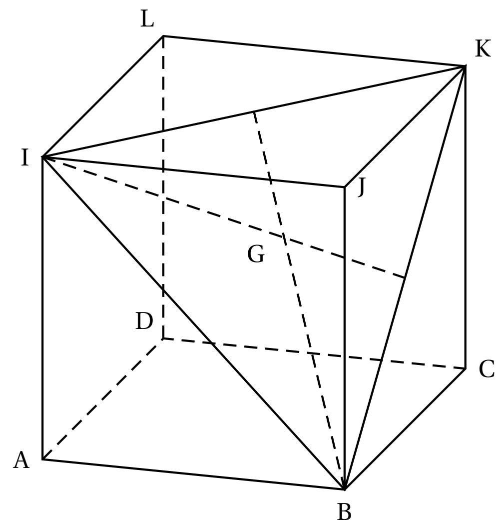
b) L'ensemble des points M du plan complexe tels que $|z| = z$ est une droite.

c) Les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre Ω d'affixe 3.

d) $\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BE}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

EXERCICE 13
Section dans un cube

ABCDIJKL est un cube de côté 1 et $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AD}},\overrightarrow{\text{AI}}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.
On pose G le centre de gravité du triangle BIK.



a) Le point G a pour coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Les points J, G et D sont alignés.

c) La droite (JD) et le plan (BIK) sont perpendiculaires.

d) Le volume du tétraèdre IKBJ est égal a $\dfrac{1}{6}$.

EXERCICE 14
Petit tour d'horizon sur les probabilités continues

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose :

- α et β deux nombres réels tels que $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$
- U la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$
- X la variable aléatoire définie par la relation $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

a) Pour tout nombre réel $a \in]0\,;\,1[$, $P(U = a) > 0$.

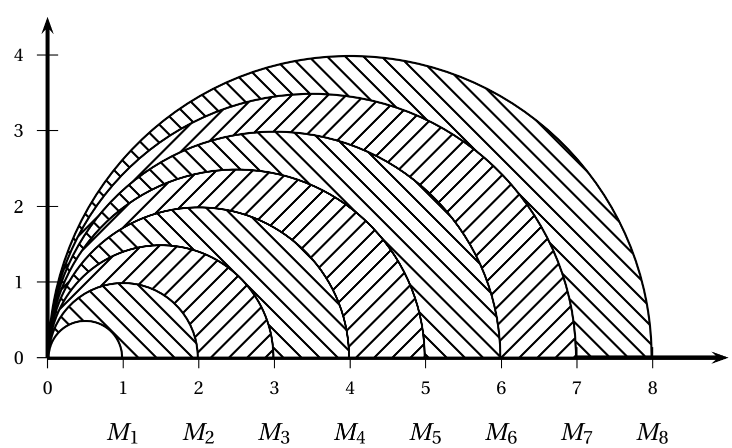
b) Pour tout nombre réel a strictement positif, $p(X < a) = p\left(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right)$.

c) $P(U \leqslant \beta) = \beta$.

d) $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \mathrm{e}^{-\lambda\beta} - \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}$.

EXERCICE 15
Petite suite de points

Soit n un entier naturel non nul et (M_n) la suite de points de coordonnées $(n\,;\,0)$.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathscr{A}_n$, l'aire de la partie du plan comprise entre les demi-cercles de diamètres $[\text{O}M_n]$ et $[\text{O}M_{n+1}]$ et l'axe des abscisses (cf. figure ci-contre).



a) $A_1 = 3\pi$ et $A_2 = 5\pi$.

b) $A_n = 2 \times \pi \times n + \pi$.

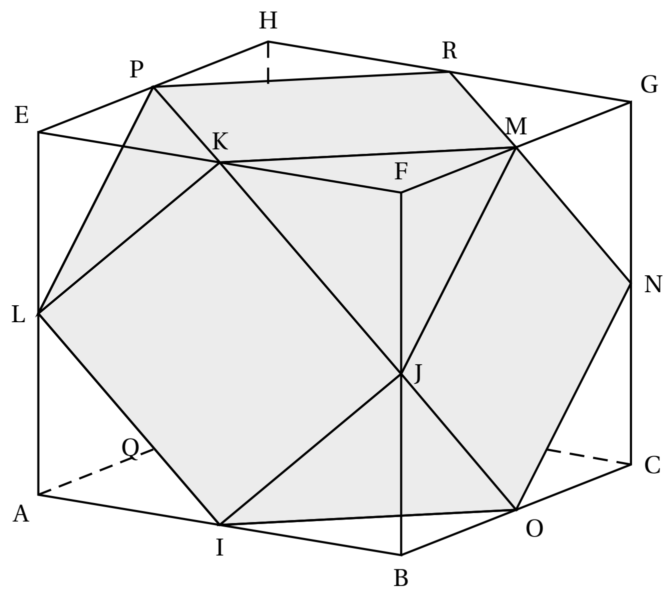
c) La suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2\pi$.

d) Pour tout entier naturel n non nul, $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \dfrac{\pi}{8} \times n \times (n+2)$.

EXERCICE 16
Travail autour d'un cuboctaèdre

ABCDEFGH est un cube de côté 1 et $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

Définition
On appelle **cuboctaèdre** le solide ayant pour sommets les milieux des arêtes d'un cube.



Dans le cube ABCDEFGH, on définit I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S et T les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [EF], [AE], [FG], [CG], [BC], [EH], [AD], [HG], [BD] et [CD].
On appelle (Γ) le cubocatèdre ainsi obtenu (cf. figure ci-dessus).

Δ est la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 0,5\\ y &=& 0,25 - 0,13t\\ z &=& 1,25 - 0,13t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a) Le cuboctaèdre (Γ) se compose de 6 faces carrées, huit faces triangulaires et a un volume $V = \dfrac{5}{6}$.

b) Les plans (SQT) et (KMJ) sont sécants.

c) Les plans (JKM) et (LKP) sont sécants suivant une droite parallèle à la droite (IR).

d) Les plans (JKM) et (LKP) sont sécants suivant la droite Δ.

CORRIGÉS

EXERCICE 1	a) FAUX	b) FAUX	c) VRAI	d) VRAI
EXERCICE 2	a) FAUX	b) VRAI	c) FAUX	d) FAUX
EXERCICE 3	a) VRAI	b) FAUX	c) VRAI	d) FAUX
EXERCICE 4	a) FAUX	b) VRAI	c) FAUX	d) VRAI
EXERCICE 5	a) FAUX	b) VRAI	c) FAUX	d) FAUX
EXERCICE 6	a) VRAI	b) FAUX	c) VRAI	d) VRAI
EXERCICE 7	a) FAUX	b) FAUX	c) FAUX	d) FAUX
EXERCICE 8	a) VRAI	b) VRAI	c) FAUX	d) FAUX
EXERCICE 9	a) FAUX	b) VRAI	c) FAUX	d) FAUX
EXERCICE 10	a) FAUX	b) VRAI	c) VRAI	d) VRAI
EXERCICE 11	a) VRAI	b) FAUX	c) FAUX	d) VRAI
EXERCICE 12	a) FAUX	b) FAUX	c) VRAI	d) VRAI
EXERCICE 13	a) FAUX	b) VRAI	c) VRAI	d) VRAI
EXERCICE 14	a) FAUX	b) VRAI	c) VRAI	d) FAUX
EXERCICE 15	a) FAUX	b) FAUX	c) FAUX	d) VRAI
EXERCICE 16	a) VRAI	b) FAUX	c) VRAI	d) VRAI