Année 2010-2011	**Enseignements d'exploration : Secondes**
Vision du monde	**Thème : mouvement des planètes**
FICHE N°8	**Objectif : étude mathématique de trajectoires elliptiques**

Etude d'un ensemble de points

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On s'intéresse à l'ensemble de tous les points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

(R1) $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

Il s'agit d'un ***problème de lieu géométrique***.

Pour une première approche, on utilise *Geogebra* .

- Tracer un repère et définir le point O comme origine du repère.
- Définir les deux valeurs : $a = 10$ et $b = 6$.
- Saisir ensuite l'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en utilisant les lettres a et b. On obtient une ***ellipse***.

Observation : en faisant varier les valeurs de a et b, faire une première observation sur le rôle de ces valeurs (on essaiera en particulier le cas $a = b$).

- Construire les points A et A' intersection de l'ellipse avec l'axe des abscisses
- Construire les points B et B' intersection de l'ellipse avec l'axe des ordonnées

Démo : par observation, il semble que AA' = $2a$ et BB' = $2b$. Le prouver.

[AA'] est le ***grand axe*** et [BB'] le ***petit axe*** lorsque $a > b$.

On suppose désormais que $a > b$.

On appelle c le nombre positif vérifiant : $\boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2}$.

- Placer les points $F(c\ ;\ 0)$ et $F'(-c\ ;\ 0)$.

Soit le nombre $\boldsymbol{e = \dfrac{c}{a}}$. e est appelé ***l'excentricité*** de l'ellipse.

Démo : montrer que $c = a \times \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ puis prouver que $e \in [0\ ;\ 1]$.
Quelle est la forme particulière de l'ellipse lorsque $e = 0$?

- Saisir le nombre $e = \dfrac{c}{a}$
- Placer les points $K\left(\dfrac{a^2}{c}, 0\right)$ et $K'\left(-\dfrac{a^2}{c}, 0\right)$.
- Construire les droites *(d)* et *(d')* perpendiculaires à l'axe des abscisses respectivement en K et K'
- Placer un point M sur l'ellipse et construire son projeté orthogonal H sur la droite *(d)*.
- Saisir le coefficient $k = \dfrac{MF}{MH}$ (avec *Geogebra* : Distance[M,F];Distance[M,H])
- Déplacer M et observer la valeur de k

On observe que, pour tout point M de l'ellipse : $\boxed{\dfrac{MF}{MH} = \ldots\ldots\ldots}$ ***(R2)***

Démo : pour les matheux : montrer que *(R1)* $\Leftrightarrow$ *(R2)*.

- Tracer les segments MF et MF'.
- Définir la variable s = MF + MF' (sur *Geogebra* : Distance[M,F] + Distance[M',F])

Déplacer M sur l'ellipse et observer s.

On observe que, pour tout point M de l'ellipse : $\boxed{\textbf{MF + MF' = ………}}$ ***(R3)***

Démo : par considération de symétrie, on peut aussi traduire *(R2)* en *(R'2)* par : $\frac{MF'}{MH'} = e$. Montrer que *(R2)* et *(R'2)* $\Rightarrow$ *(R3)*.

La trajectoire de la Terre autour du soleil

La Terre évolue autour du soleil selon une ellipse dont le soleil est un foyer (prenons F ici).

L'excentricité de la trajectoire de la Terre autour du Soleil est de 0,01675, ce qui est très faible. La distance a est de l'ordre de 149 millions de km.

Avec ces données, calculer :

la distance focale f = FF' = 2c.

le périhélie : distance Terre-soleil la plus petite

l'aphélie : distance Terre-soleil la plus grande

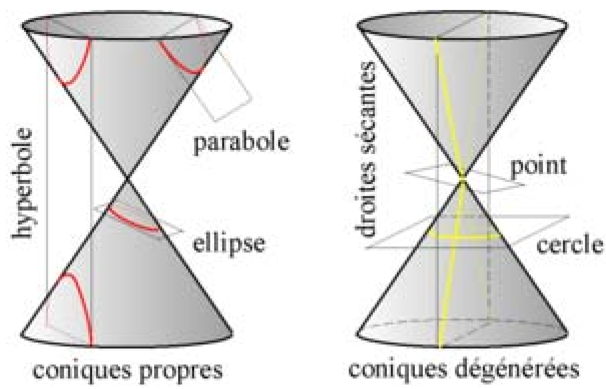
A savoir : La plupart des objets en orbite autour du Soleil ont des orbites elliptiques de faible excentricité. Il existe donc une très faible probabilité de rencontre entre ces objets. Les grosses planètes ont ainsi des trajectoires très ordonnées du point de vue de leur distance moyenne au Soleil : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton. Les 8 premières tournent presque "rond", la neuvième, Pluton, jouant les excentriques puisque sa trajectoire elliptique la conduit, à certaines périodes, à se trouver plus proche de nous que Neptune. Ce sont donc les deux seules planètes qui ont une probabilité non nulle de se rencontrer un jour !

- En déduire le tracé de la trajectoire de la Terre avec ces paramètres, sur *Geogebra*.

Quelle observation peut-on en faire ?

Les coniques en mathématiques

En mathématiques, un cône est une surface infinie symétrique par rapport à son sommet S. Il est obtenu par rotation d'une droite passant par O autour de son axe, passant aussi par O. Ces droites sont les *génératrices* du cône.



Une conique s'obtient par la section plane d'un cône de révolution.

On montre que, lorsque le plan de section ne passe pas par 0 :

- si le plan de section est parallèle à une génératrice, la section plane est une ***parabole***,
- si le plan de section est parallèle à l'axe du cône, on obtient une ***hyperbole***,
- sinon, on obtient une ***ellipse***.

Toutes ces courbes vérifient la propriété : $\frac{MF}{MH} = e$ avec :

si $e = 1$: parabole

si $0 < e < 1$: ellipse

si $e > 1$: hyperbole

En physique, ce sont les trois formes de trajectoires des mouvements gravitationnels.