

## ∞ Baccalauréat L spécialité Métropole juin 2005 ∞

L'usage d'une calculatrice est autorisé

3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

### EXERCICE 1 OBLIGATOIRE

3 points

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés. Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :  
Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre  $n$  est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre  $p$  ( $1 \leq p \leq 26$ ) obtenu à l'aide de la formule

$$p \equiv 3 \times n + 7 \pmod{26}.$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car  $3 \times 12 + 7 = 43$  et  $43 \equiv 17 \pmod{26}$ .

1. Compléter la table de cryptage donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV.  
Retrouver la forme décryptée du message.
3. Wilson désire lui répondre : MERCI.  
Donner la forme cryptée de ce message.

### EXERCICE 2 OBLIGATOIRE

5 points

On rappelle que le nombre d'or noté  $\Phi$  est tel que  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.

Soit ABCD un carré. On considère :

- le milieu I du segment [DC],
- le cercle  $\mathcal{C}$  de centre I et de rayon [IA],
- le point d'intersection E de la demi-droite [DC) et du cercle  $\mathcal{C}$ ,
- le point F tel que AFED soit un rectangle.

1. Compléter la figure donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
2. Exprimer DI en fonction de AD.
3. Montrer que  $IA^2 = \frac{5}{4}AD^2$ , et en déduire l'expression de IE en fonction de AD.
4. Déduire des deux questions précédentes que  $DE = \Phi \cdot AD$ , et que le rectangle AFED est un rectangle d'or.

### EXERCICE 3 OBLIGATOIRE

6 points

Soit la fonction  $t$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $t(x) = 4x^2 - 5x + 1$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $t(x) = (4x - 1)(x - 1)$ . En déduire le signe de  $t(x)$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x(2x - 5) + \ln x$ .
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et la limite de  $f$  en 0.
  - b. Déterminer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{t(x)}{x}$ .
  - c. En déduire le tableau des variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - d. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $f$  dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

**EXERCICE 4 OBLIGATOIRE****6 points**

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à  $10^{-4}$ .

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.

On note F l'évènement « le véhicule contrôlé a des freins en bon état ».

On note E l'évènement « le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état ».

$\bar{E}$  et  $\bar{F}$  désignent les évènements contraires de E et de F.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.
2.
  - a. Déterminer la probabilité  $P(\bar{F})$  de l'évènement  $\bar{F}$ .
  - b. Quelle est la probabilité  $P_{\bar{F}}(\bar{E})$ , probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.
  - c. Montrer que la probabilité  $P(E \cap F)$  de l'évènement  $E \cap F$  est égale à 0,8096.
  - d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?  
Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

## FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

## Exercice 1

Table de cryptage à compléter :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p$	10											17	
forme cryptée	J											Q	
lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$n$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p$											1		
forme cryptée											A		

## Exercice 2

Figure à compléter :

