

# GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGÉNIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN  
TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE

3 mai 2023

## MATHÉMATIQUES QCM

*Les questions à choix multiples sont signalées par la mention QCM. Pour chaque QCM, plusieurs réponses sont proposées et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses. Vous entourerez la (ou les) réponse(s) choisies sur la feuille de réponses.*

*Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse fautive ne sera pas pénalisée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.*

### EXERCICE 1

**29 points**

*Pour chaque exercice plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fautive en coloriant la réponse choisie sur la feuille de réponses.*

*Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse fautive sera pénalisée par des points négatifs.*

*Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.*

*Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.*

*Les exercices sont tous indépendants.*

### Première partie – Fonctions

#### Exercice I

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

**I-A** La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**I-B**  $f'(0)$  est égal à 1.

**I-C** Pour tout  $x$  strictement négatif,  $f(x)$  est strictement négatif.

**I-D**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

### Exercice II

Soient  $g$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**II-A** Si  $g(1) = 0$ , alors  $\mathcal{C}_g$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(1; 0)$ .

**II-B** Si  $g(1) = 2$  et  $g'(1) = 3$ , alors la courbe  $\mathcal{C}_g$  admet une tangente d'équation  $y = 3x - 1$  au point de coordonnées  $(1; 2)$ .

**II-C** Si  $g$  est deux fois dérivable et si sa dérivée seconde est positive sur  $\mathbb{R}$ , alors la courbe  $\mathcal{C}_g$  est en dessous de chacune de ses tangentes.

### Exercice III

**III-A** Pour tout nombre réel  $x$ ,  $e^{3x+1} = e^x + e$ .

**III-B** Pour tout nombre réel  $x$  non nul,  $\frac{\ln(x^2)}{\ln(x^2+4)} = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)$ .

**III-C** Pour tout nombre réel  $x$  positif,  $2\ln(e^{\sqrt{x}}) = x$ .

**III-D** L'ensemble des solutions de l'équation  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$  est  $\{0\}$ .

### Exercice IV

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$ .

**IV-A**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ .

**IV-B**  $\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = 1$ .

**IV-C**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$ .

**IV-D** Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 1}$ .

## Deuxième partie - Suites numériques

### Exercice V

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  et telle que  $u_2 = 1$ .

**V-A** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

**V-B** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

**V-C** Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ .

### Exercice VI

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ .

**VI-A**  $v_1 = \frac{1}{6}$ .

**VI-B** La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**VI-C** La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**VI-D** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \frac{n}{n+1}$ .

### Troisième partie - Probabilités

$\Omega$  désigne l'univers d'une expérience aléatoire  $E$  et  $P$  désigne une probabilité sur  $\Omega$ .

#### Exercice VII

Pour tous événements  $A$  et  $B$  de probabilité dans l'intervalle  $]0; 1[$ , on a :

**VII-A**  $P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$ .

**VII-B**  $P_A(A) = 1$ .

**VII-C**  $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_A(B)$ .

**VII-D**  $P(B) = P_A(B) + P_{\overline{A}}(B)$ .

#### Exercice VIII

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,2$ .

**VIII-A**  $P(1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 2) - P(X = 0)$ .

**VIII-B**  $P(X > 1)$  est strictement positive.

**VIII-C**  $P(X = 0) = 0,2^{10}$ .

### Quatrième partie - Géométrie dans le plan

#### Exercice IX

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de coordonnées respectives dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  :

$$A(-1; 1), \quad B(3; 4) \quad \text{et} \quad C(8; 2).$$

**IX-A** La longueur du segment  $[AB]$  est  $\sqrt{7}$ .

**IX-B** Une équation de la droite  $(AB)$  est  $3x - 4y + 7 = 0$ .

**IX-C** Une équation de la médiatrice du segment  $[AB]$  est  $8x + 6y - 25 = 0$ .

**IX-D** Le projeté orthogonal  $D$  du point  $C$  sur la droite  $(AB)$  a pour coordonnées  $\left(5; \frac{11}{2}\right)$ .

## Mathématiques Spécialité

### EXERCICE 1

18 points

Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel non nul.

Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Une entreprise décide d'offrir à certains clients qui se connectent sur son site de vente en ligne une remise de 5 euros sur leur prochain achat.

La distribution des bons d'achat est programmée de la manière suivante :

- la probabilité que le premier client connecté obtienne un bon d'achat est  $\frac{1}{5}$ .
- si le  $n$ -ième client connecté gagne un bon d'achat, alors le client suivant gagne également un bon d'achat avec une probabilité de  $\frac{3}{10}$ ;
- si le  $n$ -ième client connecté ne gagne pas de bon d'achat, alors le client suivant ne gagne pas non plus de bon d'achat avec une probabilité de  $\frac{9}{10}$ .

On considère les événements suivants :

$A_n$  : « le  $n$ -ième client connecté gagne un bon d'achat de 5 euros »

$\overline{A_n}$  : « le  $n$ -ième client connecté ne gagne pas un bon d'achat de 5 euros ».

On note  $a_n = P(A_n)$ .

1. Donner la valeur de  $a_1$ .
2. Compléter l'arbre de probabilités donné dans la feuille de réponses.
3. Exprimer  $P(A_{n+1} \cap A_n)$  et  $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$  en fonction de  $u_n$ .
4. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{10}$ .  
Justifier la réponse.

Dans la suite, on pose  $u_n = a_n - \frac{1}{8}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

5.
  - a. Calculer  $u_1$ .
  - b. Justifier que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique.  
Préciser sa raison  $q$ .
6.
  - a. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- b.** Montrer que  $a_n = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul.
7. Justifier que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est convergente et donner sa limite  $\ell$ .
8. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $a_n > \frac{1}{8}$ .
- b.** Déterminer le plus petit entier naturel  $n_0$  à partir duquel  $a_n - \frac{1}{8} \leq 10^{-5}$ .  
Justifier la réponse en utilisant la fonction logarithme.

## Mathématiques Spécialité

### EXERCICE 2

22 points

Une question à choix multiples est signalée par la mention QCM. Plusieurs réponses sont proposées et il n'y a qu'une seule bonne réponse.

Vous entourerez la réponse choisie sur la feuille de réponses.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive sera pénalisée par des points négatifs.

Le total des points obtenu à cet exercice ne peut être strictement négatif.

Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $X^2 - 4X + 2 = 0$ .

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On donne les points de coordonnées suivantes :

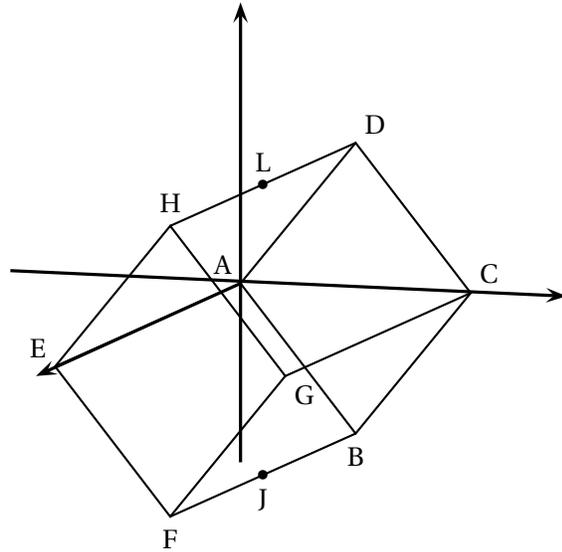
$$A(0; 0; 0), \quad B(0; 1; -\sqrt{3}),$$

$$C(0; 2; 0), \quad D(0; 1; \sqrt{3}),$$

$$E(4; 0; 0), \quad F(4; 1; -\sqrt{3})$$

$$G(4; 2; 0), \quad H(4; 1; \sqrt{3}).$$

Soit  $I$  un point de coordonnées  $(a; 0; 0)$  où  $a$  est un nombre réel de l'intervalle  $[0; 4]$ .



2. Déterminer les coordonnées des points J et L, milieux respectifs des segments [BF] et [DH].
3. a. Déterminer le réel  $\lambda$  tel que  $\vec{AI} = \lambda \cdot \vec{AE}$ .

On exprimera  $\lambda$  en fonction de  $a$ .

- b. QCM – Quel est l'ensemble décrit par le point  $I$  lorsque  $a$  décrit l'intervalle  $[0; 4]$  ?

A. le segment [AE]

C. le cercle de diamètre [AE]

B. la droite (AE)

D. un plan de vecteur normal  $\vec{AE}$

On admet que les composantes des vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{IL}$  s'expriment en fonction de  $a$  sous la forme :

$$\vec{IJ} (2 - a; 1; -\sqrt{3}) \text{ et } \vec{IL} (2 - a; 1; \sqrt{3}).$$

4. Exprimer  $IJ^2$  et  $IL^2$  en fonction de  $a$ . On ne demande pas de développer l'expression.

On observera, sans la justifier, l'égalité des longueurs IJ et IL.

5. a. Déterminer les nombres réels  $m, n$ , et  $p$  tels que  $\vec{IJ} \cdot \vec{IL} = ma^2 + na + p$ .

Justifier la réponse.

- b. En déduire les valeurs de  $a$  pour lesquelles les vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{IL}$  sont orthogonaux.

Dans les questions qui suivent, on prend  $a = 2 + \sqrt{2}$ .

6. a. Justifier que les points I, J et L définissent un plan.

- b. Justifier que le vecteur  $\vec{n} (1; \sqrt{2}; 0)$  est normal au plan (IJL).

- c. En déduire une équation cartésienne du plan (IJL).

Justifier la réponse.

7. Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

8. Déterminer les coordonnées de K, point d'intersection de la droite (CG) et du plan (IJL).

Justifier la réponse.

9. Préciser la nature du quadrilatère IJKL. Aucune justification n'est attendue.