

# GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGÉNIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

ISAT ESIREM POLYTECH Nice-Sophia POLYTECH Orléans EEIGM ENSGSI ESSTIN  
TELECOM Lille 1 ISEL ISTIA ISTASE ISTV Sup GALILÉE

Mercredi 17 mai 2006

SUJET DE MATHÉMATIQUES

## EXERCICE I

7,5 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal.

### Partie A

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. a. Déterminer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ .  
b. Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Préciser  $f(1)$  et  $f(e)$ .  
c. En déduire que  $f$  admet un maximum  $M$  que l'on donnera.
3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ . On placera avec soin les points de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisses respectives 1 et  $e$ .
4. Donner, suivant les valeurs de  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , le signe de  $f(x)$ .
5. Soit  $A$  un réel. On veut déterminer, suivant les valeurs de  $A$ , le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x) = A$$

Distinguer les différents cas et préciser, pour chacun d'eux, le nombre de solutions appartenant à chaque intervalle  $]0; 1]$ ,  $]1; e]$  ou  $]e; +\infty[$ .

### Partie B

Soit  $a$  un réel strictement positif.

On se propose dans cette partie de déterminer tous les réels  $x$ , strictement positifs, qui vérifient l'inéquation  $(\epsilon_a)$  suivante :

$$(\epsilon_a) : a^x \leq x^a.$$

1. Justifier que l'inéquation  $a^x \leq x^a$  est équivalente à l'inéquation  $f(a) \leq f(x)$ .
2. On suppose dans cette question que :  $a = e$ .
  - a. En utilisant la partie A, donner l'ensemble  $S_1$  des solutions de l'inéquation  $(\epsilon_e) : e^a \leq x^e$ .
  - b. *Application* : Sans les calculer, comparer  $e^\pi$  et  $\pi^e$ . Justifier la réponse.
3. On suppose dans cette question que :  $0 < a \leq 1$ .  
Quel est le signe de  $f(a)$ ? En utilisant la partie A, donner l'ensemble  $S_2$  des solutions de l'inéquation  $(\epsilon_a)$ , en fonction de  $a$ .
4. On suppose dans cette question que :  $a > 1$  et  $a \neq e$ .
  - a. En utilisant la partie A, expliquer pourquoi l'équation  $f(x) = \frac{\ln a}{a}$  admet deux solutions  $a_1$  et  $a_2$  qui vérifient :  $1 < a_1 < e < a_2$ .  
On remarquera que l'une des solutions  $a_1$  ou  $a_2$  est égale à  $a$ .
  - b. Donner alors l'ensemble  $S_3$  des solutions de l'inéquation  $(\epsilon_a)$ , en fonction de  $a_1$  et  $a_2$ .

5. Application : On suppose dans cette question que :  $a = 2$ .
- Déterminer l'entier naturel  $n$ , différent de 2, tel que :  $f(n) = f(2)$ .
  - En déduire l'ensemble  $S_4$  des solutions de l'inéquation :  $(e_2) : 2^x \leq x^2$ .

**EXERCICE II****7 points**

Ariane et Benjamin échangent des balles au ping-pong.

Soient les évènements suivants :

$A$  : « Ariane marque le point » et  $B$  : « Benjamin marque le point ».

Ariane étant légèrement plus expérimentée que Benjamin, la probabilité qu'elle marque

un point est :  $p = P(A) = \frac{53}{100}$ .

Ils décident d'engager une partie selon les modalités suivantes :

- Le joueur qui « gagne un set » est le premier qui marque deux points, consécutifs ou non.
- La partie s'arrête dès qu'un des deux joueurs a remporté trois sets, consécutifs ou non. On dit alors que ce dernier a gagné la partie.

**Partie A**

Dans cette partie, on étudie la probabilité pour Ariane de « gagner un set » (deux points marqués, de façon consécutive ou non).

- Dans un échange de balles, quelle est la probabilité  $q$  que Benjamin marque le point ?
- Dresser et compléter l'arbre de tous les évènements élémentaires.
- Donner la probabilité  $P_1$  qu'Ariane marque les deux premiers points.
- Donner la probabilité  $P_2$  qu'Ariane gagne le set, Benjamin ayant marqué un point.
- Donner la probabilité  $P_3$  qu'Ariane gagne le set. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

**Partie B**

On étudie maintenant la probabilité pour Ariane de « gagner la partie » (trois sets gagnés, consécutifs ou non).

Tous les sets sont joués dans des conditions identiques et indépendantes.

Pour le jeu d'un set, on note les évènements :

$S$  : « Ariane gagne le set » et  $E$  : « Ariane perd le set ».

On suppose que, pour chaque set, les probabilités de ces évènements sont :

$$P = P(S) = 0,545 \quad \text{et} \quad Q = P(E) = 0,455.$$

Ariane et Benjamin engagent une partie.

- Finir le dessin de l'arbre des évènements élémentaires et le compléter.
- Donner, en fonction de  $P$ , la probabilité  $T_1$  qu'Ariane gagne les trois premiers sets.
- Donner, en fonction de  $P$  et  $Q$ , la probabilité  $T_2$  qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté un set.
- Donner, en fonction de  $P$  et  $Q$ , la probabilité  $T_3$  qu'Ariane gagne la partie, Benjamin ayant remporté deux sets.
- Donner, en fonction de  $P$  et  $Q$ , la probabilité  $T$  qu'Ariane gagne la partie.
  - Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de la probabilité  $T$ .

6. a. Déterminer, en fonction de  $P$  et  $Q$ , la probabilité  $H$  qu'Ariane gagne la partie, sachant que Benjamin a remporté le premier set.
- b. Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de la probabilité  $H$ .

### Partie C

On suppose maintenant que chaque joueur gagne 10 euros pour chaque set gagné et perde 10 euros pour chaque set perdu. Ariane et Benjamin engagent une partie dans les mêmes conditions que précédemment.

On note  $G_A$  la variable aléatoire représentant le gain en euros d'Ariane à la fin de la partie et  $G_B$  la variable aléatoire représentant le gain de Benjamin. Ces gains peuvent être positifs ou négatifs.

1. Donner le tableau représentant la loi de probabilité de  $G_A$ . On donnera les probabilités en fonction de  $P$  et  $Q$ .
2. Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'espérance de gain  $E(G_A)$  d'Ariane à l'issue de la partie.
3. Donner, en fonction de  $E(G_A)$ , l'espérance de gain  $E(G_B)$  de Benjamin.

### EXERCICE III

5,5 points

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tous les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le réel égal au produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On considère un vecteur unitaire  $\vec{k}$  du plan, c'est-à-dire tel que  $\|\vec{k}\|^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$  et la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $O$  et de vecteur directeur  $\vec{k}$ .

On rappelle qu'un point  $N$  du plan appartient à la droite  $\mathcal{D}$  si et seulement s'il existe un réel  $x_N$  tel que :  $\overrightarrow{ON} = x_N \vec{k}$ .

Pour tout point  $M$  du plan, on note  $p(M)$  le produit scalaire suivant :

$$p(M) = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}.$$

### Partie A

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{F}$  de tous les points  $M$  du plan qui vérifient :  $p(M) = 0$ .
2. Soit  $N$  un point quelconque de la droite  $\mathcal{D}$  et  $x_N$  le réel tel que  $\overrightarrow{ON} = x_N \vec{k}$ . Déterminer  $p(N)$  en fonction de  $x_N$ .

### Partie B

On considère la transformation  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$ , associe le point  $M' = f(M)$  défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = 2p(M)\vec{k} - \overrightarrow{OM}.$$

1. Déterminer l'image  $N'$  d'un point quelconque  $N$  de la droite  $\mathcal{D}$ . Justifier la réponse.
2. Soit  $M$  un point quelconque du plan,  $M'$  son image par  $f$  et  $I_M$  le milieu du segment  $[MM']$ .
  - a. Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{OI_M}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM'}$  et montrer que  $I_M$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .

- 
- b.** Déterminer  $p(M')$  en fonction de  $p(M)$ . On fera le détail du calcul.
  - c.** En déduire l'image  $M'' = f(M')$  de  $M'$ . On justifiera la réponse.
  - d.** Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est orthogonal à  $\vec{k}$ .
- 3.** En déduire quelle est la transformation  $f$ .