Baccalauréat C Gabon juin 1977

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère la transformation f qui à tout point m d'affixe, z associe le point M d'affixe Z tel que

$$Z = \frac{z+2\text{i}}{1-\text{i}z}$$

1. Déterminer les points invariants de f.

2. Déterminer l'ensemble des points m pour lesquels Z est un nombre réel. Construire cet ensemble de points.

3. Soit A le point d'affixe i, quel est l'ensemble des points m pour lesquels A, m et M sont alignés ?

EXERCICE 2

Construire dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient

$$4y^2 = \left|9x^2 - 36x\right|.$$

PROBLÈME

On désigne par F, l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par les nombres réels.

I.

Soit E l'ensemble des fonctions numériques h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (ax+b)\text{e}^{x} + c\text{e}^{-x}.$$

(a, b et c varient dans $\mathbb{R}$).

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F. Si h_1, h_2, h_3 sont les éléments de E définis par

$$h_1(x) = x\text{e}^{-x}, \quad h_2(x) = \text{e}^{x}, \quad h_3(x) = \text{e}^{-x}$$

montrer que (h_1, h_2, h_3) est une base de E.

2. Déterminer par récurrence la dérivée n-ième, $h^{(n)}$, d'une fonction h appartenant à E.

3. Soit $\mathscr{S}$ l'application de F dans F définie par

$$\mathscr{S}(f) = f - 2f' + f''. \qquad (1)$$

- **a.** Montrer que $\mathscr{S}$ est un endomorphisme de F.
- **b.** Montrer que $\mathscr{S}_1$ restriction de $\mathscr{S}$ à E est un endomorphisme de E.
- **c.** Montrer que $\mathscr{S}_1$ est la composée d'une projection et d'une homothétie que l'on déterminera.
- **d.** Déterminer le noyau $N(\mathscr{S}_1)$ et l'image $\mathscr{S}_1(E)$ de l'endomorphisme $\mathscr{S}_1$.

II.

On veut déterminer l'ensemble G des fonctions f de F vérifiant

$$f(x) - 2f'(x) + f''(x) = \text{e}^{-x} + x - 1. \qquad (1)$$

quel que soit x réel.

1. Démontrer que l'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $\mathscr{S}_1(E)$ et trouver alors une fonction h_0 telle que $\mathscr{S}_1(h_0)(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
2. Déterminer un polynôme p_0 du premier degré tel que $\mathscr{S}(p_0)(x) = x - 1$.
3. Soit f une fonction de F appartenant au noyau $N(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$.
   a. Calculer la dérivée seconde de la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$.
   b. En déduire la forme générale de la fonction g.
   c. En déduire l'ensemble $N(\mathscr{S})$.
4. Vérifier que f appartient à G si, et seulement si $f - \left(h_0 + p_0\right)$ appartient à $N(\mathscr{S})$. En déduire l'ensemble G des fonctions vérifiant l'égalité (1).