Épreuve I

Académie de Grenoble

Exercice 1. Dominos et polyminos

Un domino est un polygone formé de deux carrés de dimension 1 par 1. Un polymino est constitué de n carrés de dimension 1 par 1 juxtaposés. Deux polyminos sont les mêmes si l'on peut passer de l'un à l'autre par symétrie ou rotation comme dans l'exemple de la figure I.1.

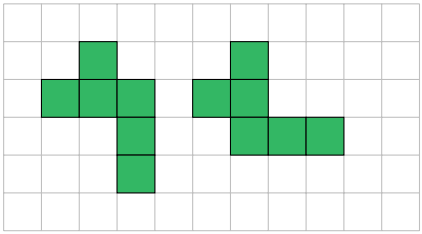

Figure I.1: *Deux polyminos identiques*

Ainsi, il n'existe qu'un domino et deux triminos $n = 3$

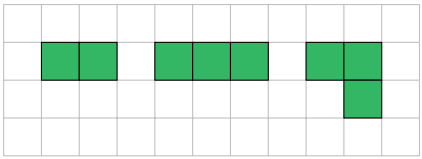

Figure I.2

1. **a.** Dessiner les cinq différentes tétraminos ($n = 4$).
   b. Combien existe-t-il de pentaminos ($n = 5$) ?
2. On s'intéresse au pavage d'un rectangle de dimension 2 par i, où i est un entier naturel non nul et l'on notera A_i le nombre de façons différentes de paver ce rectangle.

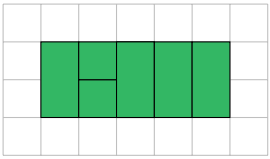

Figure I.3

   a. Déterminer A_1, A_2, A_3.
   b. Donner, en justifiant, une relation liant A_{n+2}, A_{n+1} et A_n.
   c. Déterminer le nombre de façons différentes de paver un rectangle de dimension 2 par 8.

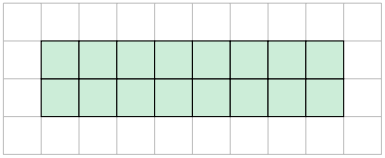

Figure I.4

3. Prouver qu'il n'est pas possible de paver, avec des dominos, un échiquier auquel on a enlevé deux coins opposés.

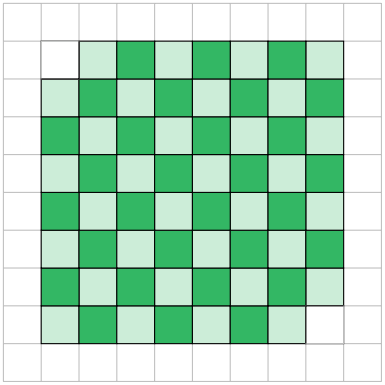

Figure I.5

4. Prouver qu'un échiquier ne peut pas être pavé avec 15 tétraminos en T et un tétramino carré.

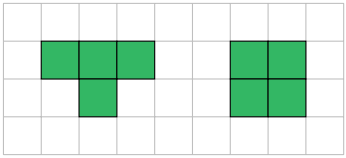

Figure I.6

Exercice 2. Nombres d'Eisenstein

Soit a et b deux entiers relatifs, on note $q(a;b)$ le nombre a^2+ab+b^2. On dit qu'un nombre entier n est un nombre d'Eisenstein s'il existe des entiers relatifs a et b tels que $n=q(a;b)$.
Les nombres d'Eisenstein ont été étudiés par le mathématicien allemand Gotthold Eisenstein (1823 -1852).
Le but de l'exercice est de déterminer certaines propriétés remarquables de ces nombres.

1. Calculer $q(0;0)$; $q(0;1)$; $q(0;2)$; $q(1;1)$; $q(1;2)$; $q(-1;1)$ et $q(-1;2)$.
2. Montrer que 49 et 91 sont des nombres d'Eisenstein.
3. Montrer que si m est un entier, alors m^2 et $3m^2$ sont des nombres d'Eisenstein.
4. Montrer que si n est un nombre d'Eisenstein, alors $4n$ est aussi un nombre d'Eisenstein.
5. Vérifier l'égalité $a^2+ab+b^2=\dfrac{(2a+b)^2+3b^2}{4}$. En déduire que tous les nombres d'Eisenstein sont positifs.
   Montrer que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.
6. Écrire et justifier un algorithme qui détermine tous les nombres d'Eisenstein entre 0 et n. Appliquer cet algorithme pour obtenir la liste des nombres d'Eisenstein entre 0 et 25.
7. Montrer que si n est un entier alors $3n-1$ n'est pas un nombre d'Eisenstein.
8. Soit a, b, c et d quatre nombres entiers. En considérant $(ac+bc+bd\,;\,ad-bc)$, montrer que le produit de deux nombres d'Eisenstein est un nombre d'Eisenstein.
9. Montrer que si n est un multiple de 9, alors n est un nombre d'Eisenstein si et seulement si $\dfrac{n}{3}$ l'est.

Exercice 3. Les clôtures

Partie A

L'enclos d'Eléonore est composé d'un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de rayon 10 mètres. Mathias se trouve à l'intérieur du disque (voir la figure I.8).

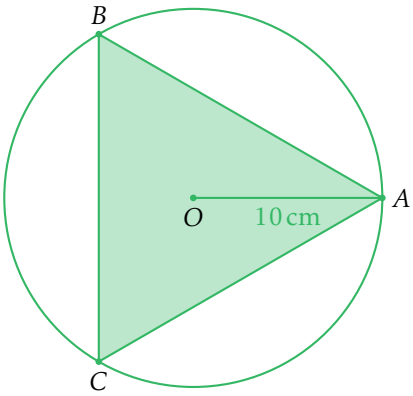

Figure I.7

On admet que la probabilité que Mathias se trouve dans une partie du disque est égale à l'aire de cette partie divisée par l'aire du disque.

1. Calculer la longueur des hauteurs du triangle ABC.
2. Quelle est la probabilité que Mathias puisse voir les trois clôtures de l'enclos ? (une clôture empêche de voir de l'autre côté)
3. Quelle est la probabilité que Mathias ne puisse voir qu'une seule des trois clôtures de l'enclos ?

Partie B

L'enclos de Fanny est composé d'un triangle équilatéral ABC de côté $10\sqrt{3}$ mètres dont le centre de gravité est situé au centre d'un cercle de rayon beaucoup plus grand.

1. Lorsque le rayon devient très grand, que peut-on dire de la probabilité pour Mathias de voir trois clôtures ?
2. Lorsque le rayon devient très grand, que peut-on dire de la probabilité pour Mathias de voir deux clôtures ?
3. Lorsque le rayon devient très grand, que peut-on dire de la probabilité pour Mathias de voir une seule clôture ?

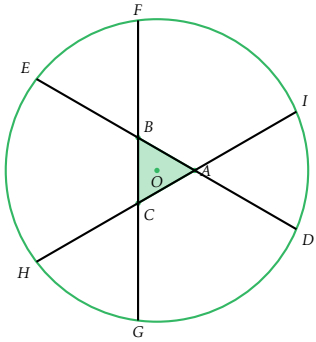

Figure I.8

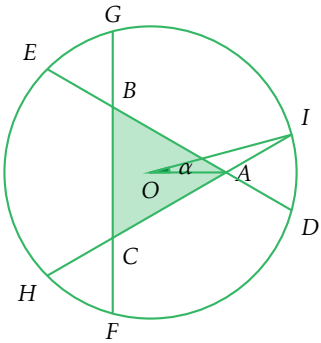

Figure I.9

Partie C

L'enclos de Gertrude est composé d'un triangle équilatéral ABC de côté $10\sqrt{3}$ mètres et dont le centre de gravité est situé au centre d'un cercle tel que l'angle α mesure 15°, voir la figure I.9.

Dans toute la suite, on pourra utiliser les résultats suivants : $\cos(15°) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\sin(15°) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\tan(15°) = 2-\sqrt{3}$

1. Déterminer la probabilité que Mathias voit 3 clôtures.
2. Déterminer la probabilité que Mathias voit 2 clôtures.
3. Déterminer la probabilité que Mathias voie une seule clôture.

Exercice 4. Il faut passer les premiers !

Pour faire une réussite, on dispose d'un jeton, d'un dé équilibré à six faces et de la grille de la figure I.10. Le joueur commence la réussite en posant le jeton sur la case 0, puis il effectue une série de lancers du dé, dans les conditions suivantes : lorsque le dé affiche « k », le joueur avance son pion de k cases et :

- s'il atteint ou dépasse la case numéro 24, il a gagné.
- s'il arrive sur une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 24 (cases grisées), il a perdu.
- dans les autres cas, il relance le dé et continue la réussite.

On s'intéresse dans cet exercice à la probabilité pour un joueur de gagner à cette réussite.

0	1	2	3	4
9	8	7	6	5
10	11	12	13	14
19	18	17	16	15
20	21	22	23	24

Figure I.10

1. **a.** Quelle est la probabilité de perdre dès le premier lancer ?
   b. Quelle est la probabilité de perdre au deuxième lancer ?
2. **a.** Quelle est la probabilité que la réussite s'achève sur la case 2 ?
   b. Quelle est la probabilité que la réussite s'achève sur la première ligne de la grille ?
3. Un joueur a écrit l'algorithme ci-dessous.
   a. Quel est le rôle de la boucle « tant que » ?
   b. Quel est le rôle de l'instruction : Pion ← Pion + ENT(6*ALEA()+1) ? [1]
   c. Quel est le rôle de la variable S ?
   d. Quelle est l'utilité de cet algorithme pour le joueur ?
4. Déterminer la valeur exacte ou, à défaut, une estimation aussi précise que possible de la probabilité de gagner à cette réussite.

1. ALEA() est une fonction qui renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0;1[$, ENT est la fonction qui a un nombre réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

```
LPremier = [2,3,5,7,11,13,17,19,23]
S ← 0
pour k de 1 à N faire
    Pion ← 0
    Perdu ← 0
    tant que Pion < 24 et Perdu = 0 faire
        Pion ← Pion + ENT(6*ALEA()+1)
        si Pion est dans LPremier alors
            Perdu ← 1
        fin
    fin
    si Perdu = 0 alors
        S ← S + 1
    fin
fin
Afficher(S/N)
```