Baccalauréat C Grèce juin 1989

EXERCICE 1 **5 POINTS**

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Soit U le point d'affixe 1 et V le point d'affixe i.
On notera arg z un argument du nombre complexe non nul z.

1. Démontrer que si A, D, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AC}}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad \text{modulo } (2\pi).$$

2. Quel est l'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que $\dfrac{z-\text{i}}{z-1}$ soit un imaginaire pur non nul ?
3. On considère dans le plan les points U d'affixe 1, M d'affixe z, M' d'affixe z' et P d'affixe zz' où z et z' sont deux nombres complexes distincts et différents de 0 et 1.
   a. Démontrer que les points M, M', P sont distincts deux à deux.
   b. Démontrer que pour tout z et tout z' vérifiant les conditions ci-dessus :

$$\arg\frac{zz'-z'}{zz'-z} = \arg\frac{z'}{z'-1} - \arg\frac{z}{z-1} \quad \text{modulo } (2\pi).$$

   c. En déduire que M, M', P sont alignés si et seulement si les points O, U, M, M' sont cocycliques ou alignés.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans un plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle AHH$'$ tel que
$\left(\overrightarrow{\text{HH}'},~\overrightarrow{\text{HA}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo (2π).
Soit (D) la droite (HH$'$).
M est un point quelconque de la droite (D) et M' le point tel que le AMM' est rectangle isocèle et vérifie

$$\left(\overrightarrow{\text{MM}'},~\overrightarrow{\text{MA}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{modulo } (2\pi).$$

1. Préciser la similitude directe de centre A qui transforme M en M'.
2. Montrer que l'ensemble (E) des points M', quand M décrit la droite (D), est la droite perpendiculaire en H$'$ à la droite (AH$'$).
3. Soit J le milieu de $[MM']$ et J_0 le milieu de $[HH']$.
   a. Calculer $\dfrac{\text{AJ}}{\text{A}M}$ et montrer que $\left(\overrightarrow{\text{A}M},~\overrightarrow{\text{AJ}}\right)$ est indépendant de M.
   b. Quelle est la nature de l'ensemble (F) des points J lorsque M décrit la droite (D).
   c. Préciser la position de (F). (On pourra se servir de la droite (AJ_0).
   Représenter (F) sur une figure.

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A

Étude de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{x} - 2 - x\mathrm{e}^{x}.$$

1. Étudier les variations de f et les limites de f quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$; dresser son tableau de variation.
2. Déduire de l'étude de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ l'existence pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f d'une asymptote (D) ; déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et de (D) et la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite (D).
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions dont l'une, notée a dans la suite du problème, vérifie $1,5 < a < 1,6$.
   Quelle est l'autre solution ?
4. Tracer $\mathscr{C}$ et D dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Partie B

Étude de la suite numérique u définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2 - 2\mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. **Étude théorique :**
   On désigne par I l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$.
   a. Étudier les variations de la fonction g définie sur I par
   $$g(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{-x}.$$
   Montrer que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ et que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left|g'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I puis que la suite u est croissante.
   En déduire que la suite est convergente vers un réel ℓ tel que $g(\ell) = \ell$.
   Montrer à l'aide de la partie A que $\ell = a$.
   c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a| \quad \text{puis que : } |u_n - a| \leqslant \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$
2. **Étude numérique :**
   soit p un entier strictement positif.
   a. Utiliser l'inégalité précédente pour déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on ait $|u_n - a| \leqslant 10^{-p}$.
   Préciser n_0 pour $p = 3$.
   b. Écrire la valeur approchée par défaut avec 3 décimales de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_7 que permet de trouver votre calculatrice.