Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Grèce septembre 1987 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit, dans le plan orienté, un triangle équilatéral ABC de côté $a > 0$ tel que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ ait pour mesure $+\dfrac{\pi}{3}$. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{a}{2}$ et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{a}{2}$.

À tout point M de $\mathscr{C}$ on associe le point M' de $\mathscr{C}'$ tel que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{B}M},\ \overrightarrow{\text{C}M'}\right)$ ait pour mesure $+\dfrac{\pi}{3}$.

1. Montrer que les droites (BM) et (CM') sont sécantes; K désignant leur point d'intersection, montrer que les points A, B, C, K sont cocycliques.
2. Montrer que la rotation de centre A transformant B en C transforme M en M'.
3. Soit I le milieu de $(M,\ M')$. Montrer que I est l'image de M dans une similitude directe de centre A, indépendante de M, dont on précisera les autres éléments.

   Quel est l'ensemble décrit par le point I quand M décrit $\mathscr{C}$?

   Le tracer.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, construire sur une même figure l'ensemble E_1 des points du plan dont les coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 = 24x + 24 \\ x \leqslant 0 \end{array}\right.$$

   et l'ensemble E_2 des points du plan dont les coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 = -4x + 24 \\ x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

   (on prendra 1 cm pour unité).

   E_1 est une partie d'une parabole $\mathscr{P}_1$, E_2 est une partie d'une parabole $\mathscr{P}_2$. Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont même foyer F, tracer la directrice de $\mathscr{P}_1$ et la directrice de $\mathscr{P}_2$ sur la figure précédente.
2.
   a. Vérifier que tout point M de la réunion des ensembles E_1 et E_2 est tel que la somme des distances de M à F et de M à l'axe des ordonnées est égale à 7.

   b. Démontrer que, réciproquement, tout point du plan dont la somme des distances à F et à l'axe des ordonnées est égale à 7 appartient à la réunion des ensembles E_1 et E_2.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Dans cette partie, on étudie la fonction f de la variable réelle x définie sur
$\text{D} =]-1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble ainsi que la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur D.
3. Construire, dans un repère orthonormal du plan $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'unité 4 cm, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f.
4. **a.** Montrer que f est une bijection de D sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans D une solution unique, notée x_1 et montrer que : $0,7 < x_1 < 0,8$.
5. Calculer en fonction de x_1 et en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction g définie sur D par

$$g(x) = \text{e}^{-x}\ln(1+x).$$

1. **a.** Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de D.

   b. En utilisant la question A 4. étudier les variations de g ; donner une valeur approchée du maximum de g.

   c. Montrer que, pour tout x de $\left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$, $g(x)$ appartient à $\left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$.
2. On se propose dans cette question de démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans D une solution unique.

   a. On pose, pour x appartenant à D : $h(x) = x - g(x)$; exprimer $h'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et montrer, en utilisant les variations de f étudiées en A, que $h'(x)$ est du signe de x.
   Étudier les variations de h.

   b. Montrer que, pour tout x non nul appartenant à D, on a : $h(x) > 0$.

   c. Résoudre alors dans D l'équation $g(x) = x$.
3. Tracer la courbe Γ représentative de g ainsi que la tangente à Γ en O, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'unité 4 cm.
4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence, pour tout entier n : $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},~u_n \in \left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$.

   b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   c. Déduire des questions précédentes que la suite converge et trouver sa limite ℓ (on montrera que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$).

   d. Représenter à l'aide de la courbe Γ les termes $u_0,~u_1,~u_2$ sur $\left(\text{O},~\vec{\imath}\right)$.