Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble juin 1970

EXERCICE 1

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$2x^3 + x^2 - 3,$$

en remarquant qu'il s'annule pour $x = 1$.

2. Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$$

et en construire la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

3. Préciser la position de (C) par rapport à la parabole (P) d'équation $y = x^2 + x$.
4. Calculer en fonction de a l'aire de la région limitée par la courbe (C), la parabole (P), la droite $x = 1$ et la droite $x = a \quad (a > 1)$.
5. Déterminer a, à 0,01 près, pour que cette aire soit égale à 1.

EXERCICE 2

On considère, dans le corps des nombres complexes, l'équation

$$x^2 + 4x\cos u + 2 + 4\cos 2u = 0$$

où u désigne un paramètre réel compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

1. Pour quelles valeurs de u les deux racines de cette équation sont-elles réelles ?
2. Déterminer le module et l'argument de chaque racine dans le cas où $u = \dfrac{\pi}{6}$.

PROBLÈME

N.B.- les parties A, B, C sont indépendantes.
A. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(x'\text{O}x, y'\text{O}y\right)$.
Soit T l'application qui, au point M de coordonnées $(x\,;y)$ non toutes deux nulles, fait correspondre le point M' de coordonnées $(X\,;\,Y)$ définies par

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

k étant un nombre réel donné, strictement positif.

1. L'application T a-t-elle des points doubles ? Montrer que l'application T du plan privé du point O dans lui-même est bijective et involutive.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
   Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}M'}$.
   En déduire la nature de l'application T.

B. On considère le point A de coordonnées $(a\ ;\ 0)$, $a > 0$, la droite (D) d'équation $x = 2a$, le cercle (C) de centre A, passant par O et la droite (L) passant par O et telle que

$$(\text{O}x,\ L) = u, \quad 0 \leqslant \pi, \quad u \neq \frac{\pi}{2}$$

1. (L) coupe la droite (D) en Q et recoupe le cercle (C) en P. Écrire l'équation de (C) et calculer les coordonnées des points P et Q.
2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{\text{O}N} = \overrightarrow{\text{PQ}}$. Calculer les coordonnées $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ de N. Trouver une relation indépendante de u entre x_1 et y_1.

C.

1. Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Tracer, en repère orthonormé sa courbe représentative, (G). Préciser la tangente en O à (G).

2. En déduire la courbe $\left(G'\right)$ ayant pour équation

$$f(x) = -x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

et l'ensemble $\left(G''\right)$ des points dont les coordonnées vérifient la relation

$$x\left(x^2+y^2\right) = 2ay^2.$$

3. Appliquer à $\left(G''\right)$ la transformation T. Montrer que l'on obtient ainsi une parabole privée de O. Déterminer k pour que la foyer de cette parabole soit A.