Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble septembre 1975

EXERCICE 1

Soit $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien $\mathscr{P}$.

Partie A

1. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et on appelle φ l'application linéaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}\\ \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{v}\end{array}\right.$$

   Montrer que $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthogonale de $\mathscr{P}$.

   En déduire que l'application linéaire φ est entièrement déterminée et écrire sa matrice B dans la base $\mathscr{B}'$.

2. Montrer que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle de $\mathscr{P}$ que l'on précisera.
3. Calculer $B^n = B^{n-1} \times B, \quad n \in \mathbb{N}^\star$.

   En déduire la matrice A_n de $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$ dans la base $\mathscr{B}$. Expliciter la matrice A_1 que l'on notera A.

Partie B

Soit $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathscr{B})$ un repère orthonormé d'un plan affine euclidien P associé à $\mathscr{P}$.
On appelle f l'application affine de P associée à l'application linéaire φ et telle que $\mathrm{O}' = f(\mathrm{O})$ ait pour coordonnées $(1\,;\,2)$ dans $\mathscr{R}$.

1. Montrer que les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point $M' = f(M)$ s'expriment en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ du point M par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \dfrac{-3x+4y}{10}+1\\ y' &=& \dfrac{4x+3y}{10}+2\end{array}\right.$$

2. Quel est l'ensemble des points invariants par f ? Montrer qu'il existe une homothétie ponctuelle H et une isométrie affine S telles que :

$$f = H \circ S = S \circ H.$$

   Reconnaître la transformation f. Préciser ses éléments caractéristiques et faire une figure indiquant la construction du transformé d'un point par f.

3. Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation

$$3x - 4y + 10 = 0 \text{ ?}$$

   Plus généralement, quelle est l'image par f d'une droite d'équation

$$ax + by + c = 0 \text{ ?}$$

   Existe-t-il des droites globalement invariantes par f ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

4. Soit Ω le point de coordonnées $(2; 4)$ et M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ $(M \neq \Omega)$.
   On définit la suite de points :
   $$M_0 = M;\quad M_1 = f(M_0);\quad M_2 = f(M_1); \ldots;\quad M_n = f(M_{n-1}); \ldots$$
   En utilisant les résultats du B 2., montrer que les points M_n appartiennent, suivant la parité de n, à l'une ou l'autre de deux droites que l'on précisera.
5. Calculer les composantes $(X_n\ ;\ Y_n)$ du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$ dans la base $\mathcal{B}$, en fonction de x et y.
   Quelle est la position limite du point M_n lorsque n augmente indéfiniment ?
6. On choisit $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{19}{4}\right)$.
   Montrer que, si l'on pose $Z_n = d(\Omega,\ M_n)$ (Z_n est la distance euclidienne des points Ω et M_n).
   Z_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   Quelle est la plus petite valeur de n telle que $d(\Omega,\ M_n) < 0,001$?

EXERCICE 2

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \text{Log}\,\frac{x-1}{x+1}$$

1. Étudier la fonction f, et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Montrer que la fonction f est intégrable sur $[2; 3]$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du , domaine plan délimité par la courbe C, la droite $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ (on pourra songer â faire une intégration par parties).
3. On appelle g, la restriction de f à $]1\ ;\ +\infty[$. Montrer que g est une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$. Déterminer g^{-1}.

EXERCICE 3

On rappelle que l'ensemble S des suites réelles muni de l'addition des suites et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note (u_n) une suite et u_n $(n \in \mathbb{N})$ le terme de rang n de la suite (u_n).
On considère l'ensemble E des suites (u_n) vérifiant la relation :

$$u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}),\quad n \in \mathbb{N} - \{0\ ;\ 1\}.$$

1. Montrer que E muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un sous-espace vectoriel de S.
2. Déterminer r $(r \in \mathbb{R}^\star)$ pour que la suite géométrique (r^n) soit élément de E.
   On désignera par $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les termes de rang $1, 2, \ldots, n+1$ de la suite (r^n).
   Montrer que la suite (nr^n) est élément de E. On désignera par $b_0, b_1, \ldots, b_n$ les termes de rang $1, 2, \ldots, n+1$ de cette suite (nr^n).
3. Soit (u_n) un élément quelconque de E. Montrer qu'il existe un couple unique de réels $(\lambda,\ \mu)$ tel que :
   $$\begin{aligned} u_0 &= \lambda a_0 + \mu b_0 \\ u_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1. \end{aligned}$$

Montrer que, quel que soit n, $n \in \mathbb{N}$, u_n est de la forme :

$$u_n = \lambda a_n + \mu b_n$$

En déduire une base pour E et l'expression en fonction de u_0, u_1 et n, du terme général u_n d'un élément quelconque (u_n) de E.