Durée : 4 heures

Baccalauréat C Grenoble juin 1969

EXERCICE 1

On considère l'équation

$$\text{(E)} \qquad az^2 + b|z|^2 + \mathrm{i}c = 0,$$

dans laquelle a, b et c sont des nombres réels et $z$un nombre complexe de module $|z|$.

1. Quelles conditions doivent vérifier a, b et c pour que $z = 3 + 2\mathrm{i}$ soit une solution de (E) ?
2. Calculer a, b et c, sachant que a, b, c appartiennent à l'ensemble, $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs et que $0 < a < 15$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
Tracer le graphe, (C), de la fonction f définie par 4

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{|x-1|}.$$

Calculer l'aire de la surface plane comprise entre la courbe (C), son asymptote oblique et les droites d'équations

$$x = 1 + \mathrm{e} \quad \text{et} \quad x = 1 + \mathrm{e}^2.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}Oy$. Soit T la transformation qui, à un point M, fait correspondre le point P de la perpendiculaire en M à $\mathrm{O}M$ ayant même projection sur l'axe $x'x$ que le milieu de $\mathrm{O}M$. P sera dit « l'image » de M par T.

1. Tous les points du plan ont-ils une image par T ? $M(x, y)$ étant tel que P existe, montrer que les coordonnées, X et Y, de P sont données par les formules

   $$X = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{x^2 + 2y^2}{2y}.$$

   Déterminer l'ensemble des points doubles de T.
2. On donne les coordonnées X et Y de P. Montrer, par le calcul, que P n'est l'image par T d'un point M que si P appartient à une région, (R), du plan, limitée par deux droites, (D) et (D$'$). Retrouver géométriquement le résultat précédent. La transformation T est-elle injective ?
3. **a.** Quelle est l'image par T de la droite d'équation $x = h$ (h constante donnée) ?

   b. Quelle est l'image par T de la droite d'équation $y = k$(k constante donnée, $k \neq 0$) ?

   Montrer que la courbe ainsi obtenue est tangente à (D) et à (D$'$).

4. Soit (D_m) la droite d'équation $y = mx$(m constante donnée, non nulle).
   Déterminer analytiquement et géométriquement l'image par T de la droite (D_m).
   Montrer que, si deux droites, $\left(D_{m_1}\right)$ et $\left(D_{m_2}\right)$, ont la même image par T, ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport à deux droites fixes.
5. Soit (C) le cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - 2by = 0 \quad (b, \text{ constante donnée, } b \neq 0).$$

   Montrer géométriquement que, pour les points de (C), T est une transformation classique.
   En déduire l'image, (C'), de (C) par T. Montrer que (C') est tangente aux droites (D) et (D$'$).
6. Soit (E) la conique d'équation

$$x^2 + 2y^2 - 2dy = 0 \quad (d, \text{ constante donnée}).$$

   Déterminer le centre, les axes et les foyers de (E).
   Déterminer l'image de (E) par T.
   t désignant le temps, montrer que le point M, de coordonnées .

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2}\sin t \quad \text{et} \quad y = \frac{d}{2}(1 + \cos t)$$

   appartient à (E).
   Déterminer l'hodographe du mouvement de M par rapport à O. Quelle est la nature du mouvement de P ?