

œ Baccalauréat C Grenoble juin 1971 œ

EXERCICE 1

\mathbb{R} étant l'ensemble des nombres réels, on désigne par f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x < 0, \\ f(x) = 0 & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue pour $x = 0$.
2. f admet-elle une dérivée pour $x = 0$?

EXERCICE 2

n étant un entier naturel, on pose

$$A_n = 2^n + 22^n + 23^n.$$

Montrer que, pour tout n , A_{n+3} est congru à A_n modulo 7.

En déduire les entiers n tels que A_n soit divisible par 7.

Les nombres qui, dans le système de numération à base deux, s'écrivent

1 110,

1 010 100,

1 001 001 000

sont-ils divisibles par 7?

PROBLÈME

On considère les deux fonctions de la variable t définies par

$$a(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

1. Démontrer les identités suivantes :

$$\begin{aligned} a^2(t) - b^2(t) &= 1, \\ a^2(t) + b^2(t) &= a(2t) \text{ et} \\ 2a(t).b(t) &= b(2t). \end{aligned}$$

2. t est fixé. - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox, y'Oy$, on définit la transformation ponctuelle T_t qui, à tout point M de coordonnées $(x; y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t)y, \\ y' &= b(t)x + a(t)y. \end{aligned}$$

- a. Démontrer que la transformation T_t est une application bijective du plan sur lui-même. Exprimer x et y en fonction de x' et de y' .
- b. Déterminer les points doubles de cette transformation.

- c. Soit M' le transformé de M par T_t et M'' le transformé de M' par T_t . Exprimer les coordonnées $(x'' ; y'')$ de M'' en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M .
3. M' étant le transformé de M par T_t démontrer que, si M' est en outre l'homologue de M dans une homothétie de centre O et de rapport λ , λ est solution de l'équation $\lambda^2 - 2\lambda a(t) + 1 = 0$.
Calculer les valeurs de λ .
En déduire que M et M' appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites, que l'on déterminera.
4. Soit (D) la droite d'équation $ux + vy + h = 0$. Montrer que l'homologue de (D) par T_t est une droite (D') .
Quelles sont les droites (D) qui sont parallèles à leur homologue (D') ?
5. Soit A le point de coordonnées $(+1 ; 0)$ et A' le transformé de A par T_t . Déterminer les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ de A' dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées de A' dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ déduit du précédent par la rotation de centre O et d'angle $(-\frac{\pi}{4})$.
6. On considère le point, P , dont les coordonnées dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ sont $X = e^{-t}$ et $Y = e^t$.
Par quelle transformation se déduit-il du point A' ?
En supposant que t désigne le temps, construire la trajectoire (C) du point P . On désigne par \vec{V} et $\vec{\Gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération du point P .
Déterminer l'ensemble des points, S , tels que $\vec{PS} = \vec{V}$. Comment peut-on déduire de (C) l'ensemble des points, G , tels que $\vec{PG} = \vec{\Gamma}$? Écrire l'équation de cet ensemble.
 r étant une longueur donnée, former l'équation permettant de déterminer à quelle date le mobile se trouve à une distance r de l'origine O .
Pour certaines valeurs de r il existe deux dates possibles, t_1 et t_2 .
Quelle relation, indépendante de r , existe-t-il entre t_1 et t_2 ?
Résoudre l'équation dans le cas où $r = \sqrt{6}$.