

Durée : 4 heures

## ∞ Baccalauréat C Grenoble juin 1972 ∞

### EXERCICE 1

Dans le plan complexe, au point  $m$ , d'affixe  $z$ , on fait correspondre le point  $M$ , d'affixe  $Z$ , par la transformation  $T_k$  définie par

$$Z = kiz + 1 + k^2,$$

$k$  étant un paramètre réel strictement positif et  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Quelle est la nature de la transformation  $T_k$ ? Montrer que  $T_k$  possède un point invariant, et un seul,  $\omega_k$ , que l'on déterminera. Préciser les éléments caractéristiques de  $T_k$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $\omega_k$ , lorsque  $k$  décrit l'ensemble des réels positifs.
3.  $k_1$  et  $k_2$  étant deux réels strictement positifs, on considère la transformation  $T_{k_2} \circ T_{k_1}$  composée de  $T_{k_1}$  et  $T_{k_2}$  (dans cet ordre).  
Montrer que  $T_{k_1} \circ T_{k_2} = T_{k_2} \circ T_{k_1}$  si, et seulement si,  $k_1 = k_2$ .  
Quelle est la nature de la transformation  $T_k \circ T_k$ ?

### EXERCICE 2

L'ensemble  $\mathbb{N}^*$  désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

1.  $x$  et  $y$  étant deux éléments de  $\mathbb{N}^*$ , premiers entre eux, démontrer que les entiers  $x + y$  et  $xy$  sont, l'un pair, l'autre impair.
2. Déterminer, dans  $\mathbb{N}^*$ , les diviseurs de 84 et les donner dans l'ordre croissant.
3. Déterminer dans  $\mathbb{N}^*$  les entiers,  $a$  et  $b$ , vérifiant simultanément les conditions

$$\begin{aligned} (1) \quad a + b &= 84, \\ (2) \quad M &= \Delta^2, \end{aligned}$$

où  $M$  est le plus petit commun multiple de  $a$  et de  $b$ , et  $\Delta$  est leur plus grand commun diviseur.  
On pourra poser  $a = \Delta a'$  et  $b = \Delta b'$ .

### PROBLÈME

On rappelle que  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des réels,  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels positifs ou nuls et  $\text{Log } x$  le logarithme népérien du nombre réel positif  $x$ .

#### Partie A

On considère la fonction  $g$ , de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que

$$g(t) = \frac{2t}{1+t} - \text{Log}(1+t).$$

1. Étudier les variations de cette fonction.  
Montrer qu'il existe un nombre  $a$  unique tel que  $a > 1$  et  $g(a) = 0$ .  
Montrer que 4 est une valeur approchée à 0,1 près de  $a$ . Les calculs devront figurer sur la copie; indiquer la table numérique utilisée.

2. Calculer la limite de  $\frac{g(t)}{t}$

- a. quand  $t$  tend vers zéro,
- b. quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Construire la courbe ( $\mathcal{C}$ ) représentative de la fonction  $g$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan affine euclidien. On choisira  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 10$ , l'unité de longueur étant le centimètre.

3. En remarquant que l'on a  $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{1+t}$ , calculer l'aire,  $S$ , du domaine limité par l'axe des abscisses  $t'Ot$  et l'arc de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) dont les points ont une ordonnée positive ou nulle. Exprimer  $S$  sous la forme d'une fraction rationnelle de  $a$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par

$$f(x) = e^{-x} \text{Log}(1 + e^{2x}).$$

1. Vérifier que  $f''(x)$  a le même signe que  $g(e^{2x})$ .

En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

Montrer que le maximum de  $f(x)$  est  $\frac{2\sqrt{a}}{1+a}$ .

2. Déterminer la limite de  $f(x)$

- a. quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ; on pourra remarquer que  $1 + e^{2x} = e^{2x}(1 + e^{-2x})$ ;
- b. quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ; on pourra poser  $e^{2x} = u$  et faire apparaître  $\text{Log}(1 + u)$ .