Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1974 Grenoble

EXERCICE 1

Soit f la fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = 2\frac{\text{Log}\, x^2}{x^3}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
2. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites ayant pour équations respectives $y = 0$, $x = 1$, $x = a$ $(a > 1)$.
   (On pourra utiliser la méthode d'intégration par parties).
   Cette aire a-t-elle une limite quand a augmente indéfiniment ?

EXERCICE 2

On fabrique un « dé » ayant la forme d'un tétraèdre régulier (pyramide à base triangulaire, les quatre faces étant des triangles équilatéraux).
Sur les quatre faces sont respectivement marqués les quatre nombres 1, 2, 5 et 10. Lorsque le « dé » est posé, trois faces sont visibles. Lorsqu'on lance le « dé », la probabilité pour qu'il se pose sur une face donnée ne dépend pas de cette face.

1. On lance ce « dé » une fois. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres vus soit supérieure ou égale à 13 ?
2. Soit k et n des entiers vérifiant $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. On effectue n lancers du « dé » et, après chacun d'eux, on regarde la somme S des nombres vus. Calculer la probabilité p_k pour qu'on ait exactement k lancers tels que : $S \geqslant 13$?
3. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n < 10^{-10}$.

PROBLÈME

N.B. - *Les deux parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes l'une de l'autre*

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
Pour tout nombre réel θ, on considère l'application f_θ de P dans P qui, au point m de coordonnées $(x\,;\,y)$, associe le point M de coordonnées $(X\,;\,Y)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x\cos\theta - 2y\sin\theta + 2\sin\theta \\ Y & = & \dfrac{1}{2}x\sin\theta + y\cos\theta + 1 - \cos\theta \end{array}\right.$$

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f_θ lorsque θ varie et on note $\circ$ la loi de composition des applications.

Partie A

1. Montrer que f_θ est une bijection affine de P.
2. Étant donnés deux nombres θ_1, θ_2 et le point m de coordonnées $(x\,;\,y)$, on pose $f_{\theta_1}(m) = M_1$ et $f_{\theta_2}(m) = M_2$.
   Exprimer les coordonnées $(X_2\,;\,Y_2)$ de M_2 en fonction de x, y, θ_1, θ_2.
   En déduire la relation $f_{\theta_2} \circ f_{\theta_1} = f_{\theta_1+\theta_2}$ (1)

3. Déterminer la structure de $\mathscr{F}$ muni de la loi $\circ$.

4. On définit pour les éléments de P une relation binaire $\mathscr{R}$ de la façon suivante :

$$m \in \text{P},\ M \in \text{P},\ m\,\mathscr{R}\,M \iff \text{il existe un nombre réel } \theta \text{ tel que } f_\theta(m) = M.$$

a. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

b. On considère un point fixe $A(\alpha\ ;\ \beta)$ distinct du point $(0\,;\,1)$.
Quand θ varie soit Γ l'ensemble des points $M(X\ ;\ Y)$ tels que $f_\theta(A) = M$ (Γ est donc la classe d'équivalence de A pour la relation $\mathscr{R}$).
Déterminer une équation cartésienne de Γ sous la forme $h(X\ ;\ Y) = 0$. Quelle est la nature géométrique de la courbe Γ ?

c. Tracer Γ dans le cas $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Partie B

1. Soit D la droite d'équation $y = 2$ et m un point de P. On appelle H la projection orthogonale de m sur D et M' le point défini par $\overrightarrow{\text{H}M'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{H}m}$.
On désigne par g l'application de P dans P telle que $g(m) = M'$.
Exprimer les coordonnées $(X'\ ;\ Y')$ de M' en fonction de celles x et y de m. Montrer que g est une bijection affine de P. Quelle est l'expression analytique de g^{-1} bijection réciproque de g ?

2. On pose $r_\theta = g^{-1} \circ f_\theta \circ g$ et $y_\theta(m) = M_1$.

3. Exprimer les coordonnées X_1 et Y_1 de M_1 en fonction de celles x et y de m.
En déduire la nature de r_θ.

a. Exprimer f_θ en fonction de g, g^{-1}, r_θ.

b. À l'aide de cette expression retrouver la relation (1) de la partie A 2.

4. On identifie P au plan complexe. On appelle z l'affixe de m.

a. Montrer que l'affixe du point H est $\dfrac{z+\overline{z}}{2} + 2\text{i}$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

b. Exprimer en fonction de z et $\overline{z}$ l'affixe Z' de $M' = g(m)$ et l'affixe Z'' de $M'' = g^{-1}(m)$.

c. On note u le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Exprimer l'affixe de $M = f_\theta(m)$ en fonction de z, $\overline{z}$, u, $\overline{u}$.
Retrouver ainsi les coordonnées X et Y de M en fonction de θ et des coordonnées de m.