∽ Baccalauréat C Grenoble juin 1976 ∾

EXERCICE 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \text{Log}\,(x-1) + \text{Log}\,(x+1) - 1$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Préciser l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec la droite $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$.
2. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g. Préciser le domaine de définition et l'ensemble des valeurs de g ; expliciter cette fonction.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de E.
On considère l'application linéaire f de E dans lui-même définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f\left(\vec{\imath}\right) & = & 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \\ f\left(\vec{\jmath}\right) & = & -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{k} \\ f\left(\vec{k}\right) & = & 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \end{array}\right.$$

1. Déterminer le noyau de f et en donner une base.
2. Déterminer l'image P de f. On en donnera une équation cartésienne et une base.
3. On considère l'application linéaire f_1 de P dans lui-même définie par

   $$\forall \vec{u} \in \text{P}, \quad f_1\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{u}\right).$$

   Quelle est la nature de f ?

PROBLÈME

Soit A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Partie A

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $\lambda A + \mu B$ où $(\lambda\,;\ \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre deux et que $(A,\ B)$ en est une base.
2. Calculer A^2, B^2, $A \times B$ et $B \times A$ et en déduire le produit de deux matrices quelconques de $\mathcal{M}$.
3. Montrer que $\mathcal{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif et unitaire. Quels en sont les éléments inversibles ?

Partie B

Soit P un plan affine euclidien et $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de ce plan. Pour toute valeur réelle de λ, on considère l'application affine f_λ de P dans lui-même définie de la façon suivante :

— l'application linéaire associée à f_λ a pour matrice $M_\lambda = \lambda A + B$ relativement à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\imath}\right)$;

— l'image de O par f_λ est le point O′ de coordonnées 1

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_\lambda & = & \dfrac{1}{3}(\lambda+1) \\ y_\lambda & = & \dfrac{2}{9}(\lambda+1)^2 \end{array}\right.$$

relativement au repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Pour quelle valeur de λ l'application f_λ est-elle non bijective? Quelle est alors l'image de P par f_λ ?
2. Montrer que l'application f_λ admet une droite de points invariants uniquement pour $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$. Écrire une équation cartésienne de cette droite dans chacun de ces cas.
3. Soit s l'application f_λ correspondant à $\lambda = -1$. Montrer que s est une isométrie affine que l'on précisera.
4. Soit g l'application f_λ correspondant à $\lambda = 2$. On désigne par M' l'image par g d'un point M de P.
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction indépendante de M.
   b. Soit H le symétrique de M' par rapport à M. Quel est l'ensemble des points H ? En déduire une construction géométrique de M' à partir de M.

Partie C

Soit M_0 le point de coordonnées $(3 ; 1)$ relativement au repère de P $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de P définis par

$$M_{n+1} = g\left(M_n\right).$$

On appelle x_n et y_n les coordonnées de M_n.

1. Montrer que les points M_n appartiennent tous à une même droite dont on écrira une équation cartésienne.
   En déduire une relation liant x_{n+1} et x_n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont :
   — soit tous deux divisibles par 5;
   — soit premiers entre eux.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 2^{n+1} + 1.$$

   Établir que x_n est divisible par 5 si et seulement si x_{n+4} est divisible par 5. En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont tous deux divisibles par 5.