∽ Baccalauréat C Grenoble juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\text{Log}\left(x^2\right) & \text{pour} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0 \end{cases}$$

(Log désigne le logarithme népérien. On rappelle qu'on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\text{Log}\, x = 0$.

1. La fonction f est-elle continue au point $x = 0$? Est-elle dérivable en ce point ? Si oui, calculer la dérivée au point $x = 0$.
2. Étudier les variations de la fonction f. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentation graphique de f dans un repère orthonormé. Précisez les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisse 1 et -1.
3. En faisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^{\alpha} f(x)\,\text{d}x \quad \text{pour } \alpha > 0.$$

Cette intégrale a-t-elle une limite quand α tend vers zéro ? Si oui, peut-on interpréter géométriquement cette limite ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$.

1. Soit Q la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

Donner, en utilisant une fonction rationnelle, une autre expression de $Q(x)$ pour $x \neq 1$. À l'aide d'une dérivation, en déduire une autre expression de la somme

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2}.$$

2. Soit p un nombre réel, $0 < p < 1$. Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies, numérotées de 1 à n. Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité de renverser la i-ème haie est p.
Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la n-ième haie, quel que soit le nombre de haies renversées.
Soit X la variable aléatoire définie comme suit :

$$\text{X} = \begin{cases} n+1 & \text{si aucune haie n'est renversée} \\ k & \text{si } k \text{ est le numéro de la première haie renversée} \end{cases}$$

   a. Calculer en fonction de p et k la probabilité de l'évènement $(\text{X} = k)$, notée $P(\text{X} = k)$; préciser $P(\text{X} = 1)$ et $P(\text{X} = n+1)$.
   Vérifier qu'on a :

$$P(\text{X} = 1) + P(\text{X} = 2) + \ldots + P(\text{X} = n+1) = 1$$

   b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et p.

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan affine P est rapporté à un repère cartésien $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note P$'$ l'ensemble des points d'abscisse non nulle de P, et D^0 l'ensemble des points d'abscisse nulle.
On définit dans P la loi de composition interne, notée $\star$, qui au couple de points $(m\ ;\ m')$ de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ associe le point $m \star m'$ de coordonnées $\left(xx'\ ;\ xy' + y\right)$.

Partie A

1. Montrer que la loi $\star$ est associative. Montrer qu'il existe un élément neutre E, qu'on déterminera.
2. Déterminer l'ensemble des points de P qui admettent un symétrique pour la loi $\star$; déterminer les coordonnées du symétrique du point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, lorsque celui-ci existe. Quelle est la structure de $(\text{P}', \star)$?
3. Soit M_0 un point de P, de coordonnées $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$. Déterminer l'ensemble G des points de P* qui commutent avec M_0 ; montrer que c'est un sous-groupe commutatif de $(\text{P}', \star)$. Dans quel cas peut-on avoir $G = \text{P}'$?

   Déterminer toutes les droites affines D, contenues dans P, telles que $D \cap \text{P}'$ soit un sous-groupe de P$'$.

Partie B

Pour chaque point A de P, on note f_{A} l'application qui au point m, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que $M = \text{A} \star m$.
Dans cette question et dans la suite du problème, on note $(a\ ;\ b)$ les coordonnées de A.

1. Donner l'expression analytique de f_{A}, et caractériser f_{A} géométriquement.

   Quels sont les points invariants de f_{A} ?
2. Démontrer qu'on a, pour tout $\text{A}' \in \text{P}$, $f_{\text{A}} \circ f_{\text{A}'} = f_{\text{A}\star\text{A}'}$, où $\circ$ désigne la loi de composition des applications.

   Soit $F = \left\{f_{\text{A}} / \text{A} \in \text{P}'\right\}$.

   Montrer que l'application $\text{A} \longmapsto f_{\text{A}}$ est un isomorphisme de $(\text{P}', \star)$ sur $(F, \circ)$. En déduire la structure de F.
3. Montrer que pour tout $\text{A} \in \text{P}$ on a $f_{\text{A}}\left(D^0\right) \subset D^0$. On notera f_{A}^0 l'application de D^0 dans D^0 qui à un point $m \in D^0$ associe $f_{\text{A}}(m)$.

   Montrer que l'application $\text{A} \longmapsto f_{\text{A}}^0$ est un isomorphisme de $(\text{P}', \star)$ sur, un groupe d'applications bijectives de D^0 dans D^0, qu'on caractérisera et qu on reconnaîtra.
4. On définit une suite (A_n) de points de P par $A_1 = \text{A}$, $A_2 = f_{\text{A}}\left(A_1\right), \ldots, A_n = f_{\text{A}}\left(A_{n-1}\right)$ pour $n \geqslant 2$. Déterminer les coordonnées de A_n en fonction de a, b et n (on pourra distinguer les cas $a = 1$, et $a \neq 1$). Montrer que si on a $|a| < 1$, la suite (A_n) a une limite, qu'on précisera.

Partie C

Pour chaque point A de P (de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on note g_{A} l'application de P dans P qui au point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M de coordonnées $(X\ ;\ Y)$ tel que $M = m \star \text{A}$.

1. Donner l'expression analytique de g_{A}. Quels sont ses points invariants ?
2. Montrer que si une application affine de P dans P laisse invariants deux points distincts de D^0, elle laisse invariants tous les points de D^0.

   Déterminer toutes les applications affines de P dans P qui laissent invariants tous les points de D^0 ; y en-a-t-il d'autres que les applications g_{A}, $\text{A} \in \text{P}$.

3. Déterminer l'ensemble des points A de P tel que g_A soit involutive,

Partie D

On suppose dans cette question que $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est une base orthonormée directe de P. A désigne le point de coordonnées $(-1~;~1)$, et on pose $g_A = g$.

1. Donner l'expression analytique de g, et caractériser g géométriquement,

2. Quelle est l'équation du transformé $(\mathscr{C}_1)$ par g du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1 ?

3. On note $\left(\text{O}, \vec{i_1}, \vec{i_2}\right)$ le repère orthonormé qui se déduit de $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ par rotation de centre O et d'angle α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Déterminer l'équation de $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{i_1}, \vec{i_2}\right)$, on notera $\left(x_1~;~y_1\right)$ les coordonnées d'un point dans le nouveau repère.

Quelle relation α doit-il satisfaire pour que le terme en $x_1 y_1$ dans la nouvelle équation de $(\mathscr{C}_1)$ soit nul ?

Calculer alors $\cos 2\alpha$ et $\sin 2\alpha$.

4. Reconnaître $(\mathscr{C}_1)$. Préciser ses éléments de symétrie. Préciser les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$.