Baccalauréat C Grenoble juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

1. Soit p un entier naturel. Montrer qu'un seul des entiers p, $p+10$, $p+20$ est multiple de 3.
   En déduire tous les triplets $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{N}^3$ tels que $a,\ b,\ c$ soient tous premiers et soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 10.
2. Soit $\mathrm{E} = \{(u,\ v,\ w) \in \mathbb{Z}^3 / 3u + 13v + 23w = 0\}$.
   a. Montrer, pour $(v,\ w)$ élément de $\mathbb{Z}^2$, l'équivalence des deux propositions suivantes :
   $$\{13v + 23w = 0 \quad (\mod 3)\} \quad \text{et}/quad\{v = w \quad (\mod 3)\}$$
   b. En déduire que E est l'ensemble des triplets de la forme :
   $$\left(-13k - 23k' - 12r,\ 3k + r,\ 3k' + r\right)$$
   où $(k,\ k',\ r)$ prend toute valeur dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0,\ 1,\ 2\}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2\sqrt{|\mathrm{Log} x|}$$

(Log désigne « Logarithme népérien »).

1. **a.** Quel est l'ensemble de définition, D, de f ?
   b. Étudier si f a une limite pour x positif et tendant vers 0.
2. Soit g la fonction numérique telle que :
   $$\text{pour } x \in D, \quad f(x) = g(x) \quad \text{et } g(0) = 0.$$
   a. Montrer que g est dérivable, à droite, en 0 et préciser le nombre dérivé.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{Log}\, x}{x-1}$; étudier, ensuite, la dérivabilité de g en 1.
3. Etudier le sens de variation de g. Tracer la courbe $\mathscr{C}$, représentative de g, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Préciser les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1, s'il y a lieu.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit E un plan affine euclidien orienté; on considère trois points A, B et C non alignés de ce plan.
Soit k un réel non nul; on définit les suites de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{array}{llll} & A_0 = \mathrm{A}, & B_0 = \mathrm{B}, & C_0 = \mathrm{C},\\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, & \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = k\overrightarrow{A_nB_n}, & \overrightarrow{B_nB_{n+1}} = k\overrightarrow{B_nC_n}, & \overrightarrow{C_nC_{n+1}} = k\overrightarrow{C_nA_n}\end{array}$$

On appelle isobarycentre des points A, B et C, le barycentre du système
((A, 1), (B, 1), (C, 1)).

Partie A

1. Montrer que A_1, B_1 et C_1 ont le même isobarycentre G que A, B et C.
   Montrer que, pour tout entier n, l'isobarycentre de A_n, B_n et C_n est le même point G.
2. Soit f l'application affine de E dans E telle que $f(\text{A}) = A_{l'1}$, $f(\text{B}) = B_1$ et $f(\text{C}) = C_1$.
   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(A_n\right) = A_{n+1},\ f\left(B_n\right) = B_{n+1},\ \text{et } f\left(C_n\right) = C_{n+1}.$$

Partie B

On choisit dans E, un repère orthonormé direct d'origine G. A chaque point M de E on associe son affixe dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On considère les points I, J, K d'affixes respectives i, j , j^2 où

$$\text{j} = -\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On définit les suites de points $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{lccc} & I_0 = \text{I}, & J_0 = \text{J}, & K_0 = \text{K}, \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, & \overrightarrow{I_nI_{n+1}} = k\overrightarrow{I_nJ_n}, & \overrightarrow{J_nJ_{n+1}} = k\overrightarrow{J_nK_n}, & \overrightarrow{K_nK_{n+1}} = k\overrightarrow{K_nI_n} \end{array}$$

On note α_n, β_n, γ_n les affixes respectives des points I_n, J_n et K_n.

1. **a.** Calculer α_1 en fonction de k et j , puis β_1 et γ_1 en fonction de α_1 et j.
   b. Quelle est la nature de l'application affine φ de E dans E définie par

$$\varphi\left(_I0\right) = I_1, \quad \varphi(J0) = J_1, \quad \text{et } \varphi(K0) = K_1?$$

   Faire une figure en prenant $k = \dfrac{3}{4}$.
   c. Montrer que $\alpha_n = (\alpha_1)^n$ pour tout entier n. Calculer β_n et γ_n.
2. Soit t l'application affine de E dans E telle que $t(\text{I}) = \text{A}$, $t(\text{J}) = \text{B}$ et $t(\text{K}) = \text{C}$, A, B et C étant les points donnés au début du texte.
   a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t\left(I_n\right) = A_n, \quad t\left(J_n\right) = B_n, \quad t\left(K_n\right) = C_n.$$

   b. Soit a, b, c les affixes respectives de A, B, C et a_n, b_n, c_n les affixes respectives de A_n, B_n, C_n.
   On rappelle que l'isobarycentre de A, B, C est G. Quelle relation a-t-on entre a, b et c?
   Montrer qu'il existe deux nombres complexes λ et μ non nuls simultanément tels que la relation (1) $\quad z' = \lambda z + ţ\overline{z}$ associe à tout point M d'affixe z le point $t(M)$ d'affixe z'.
   (Pour cela on pourra traduire à l'aide des complexes les relations $t(\text{I}) = \text{A}$, $t(\text{J}) = \text{B}$ et $t(\text{K}) = \text{C}$ et vérifier que la relation (1) trouvée traduit une application affine).
   c. Déterminer l'affixe a_n du point A_n en fonction de λ, μ, n, k et α_1.

Partie C

On suppose dans cette question que k vérifie $0 < k < 1$.

1. Montrer que $|\alpha_1| < 1$.
2. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} |b_n| = 0 \quad \text{et } \lim_{n\to+\infty} |c_n| = 0$$

Partie D

1. Que peut-on dire du triangle A, B, C et de l'application f dans chacun des cas suivants :

a. quand $\mu = 0$,

b. quand $\lambda = 0$?

2. On suppose maintenant que f est une similitude directe. Quel est son centre ? Montrer qu'il existe une similitude directe s de centre G telle que

$$s(\text{A}) = \text{B} \quad \text{et} \quad s\left(A_1\right) = B_1.$$

Etablir que $s(\text{B}) = \text{C}$ et que $s(\text{C}) = \text{A}$. Que peut-on dire alors de s ? Quelle est la nature, dans ce cas, du triangle A, B, C ?