

Durée : 4 heures

♣ Baccalauréat C Grenoble juin 1979 ♣

PREMIER EXERCICE

3,5 points

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel strictement positif, A le point de coordonnées $(a; 0)$ et B le point de coordonnées $(a; a)$. On désigne par R la rotation de centre O et d'angle droit direct, par S la symétrie par rapport au point B , et par R' la rotation de centre A et d'angle droit rétrograde. On pose $F = R' \circ S \circ R$.

1. Quelle est la nature de la transformation F ?
Préciser ses éléments caractéristiques (on pourra construire l'image par F du point C défini par $C = R^{-1}(B)$).
2. Soit D la droite d'équation $x + y = a$ et S_D la symétrie orthogonale par rapport à D . Déterminer la transformation composée $S_D \circ F$.

DEUXIÈME EXERCICE

3,5 points

1. Soit p un entier naturel premier. Trouver tous les entiers relatifs α vérifiant la congruence $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$.
En déduire la résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ de l'équation $x^2 = \hat{0}$.
(a étant un entier la notation \hat{a} désigne la classe de a , élément de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$).
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^2 + 16x + 15 = \hat{0}.$$

PROBLÈME

13 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment, sauf indication contraire du texte.
Il sera tenu compte de la précision de la rédaction.

Soit E l'ensemble des nombres complexes différents de -1 ; 0 et 1 .

A.

1. On pose :

$$e(z) = z \qquad f(z) = -\frac{1}{z}$$
$$g(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1} \qquad h(z) = \frac{z+1}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z}$$

Montrer que ces relations définissent des applications bijectives e, f, g, h de E dans E .

2. Soit G l'ensemble de ces quatre applications. Démontrer que G est un groupe commutatif pour la composition des applications.
3. On définit l'application φ de E dans \mathbb{C} par $\varphi = e + f + g + h$. Quelles sont les applications composées : $\varphi \circ f$; $\varphi \circ g$; $\varphi \circ h$? L'application φ est-elle bijective?
4. Étant donné un élément a de E , on veut résoudre dans E l'équation

$$\varphi(z) = \varphi(a) \quad (1)$$

- a. Indiquer sans calcul quatre solutions, distinctes ou non, de l'équation (1).

- b. Montrer que l'équation (1) ne peut pas avoir plus de quatre solutions (on pourra admettre qu'un polynôme de degré n à coefficients complexes a au plus n racines distinctes dans \mathbb{C}).
- c. Montrer que suivant la valeur de a , l'équation (1) admet, soit quatre solutions distinctes, soit une seule solution.

B.

On désigne par Ψ la restriction à l'ensemble $\mathbb{R} \cap E$ de l'application φ définie en A 3.

1. Étudier les variations de la fonction Ψ .
2. Dessiner avec soin sa représentation graphique Γ relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Dans le cas où a est réel, retrouver le résultat obtenu à la question A 4. c.
Dans le cas particulier $a = 2$, vérifier graphiquement les valeurs des solutions de l'équation (1).
4. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ et par les droites $y = x; x = 3; x = 5$.

C

Étant donné un nombre complexe z , on définit les nombres complexes :

$$z_1 = f(z) \quad ; \quad z_2 = g(z) \quad ; \quad z_3 = h(z) \quad ; \quad z_4 = \varphi(z)$$

où f, g, h, φ sont les fonctions définies dans la partie A. On désigne respectivement par M, M_1, M_2, M_3, M_4 les images de z , dans un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit F l'ensemble des éléments de E qui ont pour module 1. Si z est un élément de F , on désigne par θ la détermination de son argument appartenant à l'ensemble $]0; \pi[\cup]\pi; 2\pi[$.
Exprimer, en fonction de θ , les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et donner pour chacun d'eux le module, et une détermination de l'argument.
2. En déduire les ensembles décrits respectivement par les points M_1, M_2, M_3, M_4 quand M décrit le cercle de centre Ω et de rayon 1, privé des points d'affixes -1 et 1.