

∞ Baccalauréat C Grenoble juin 1981 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Montrer qu'un entier naturel n est divisible par 42 (42 est écrit dans le système décimal) si, et seulement si, n est divisible par 6 et par 7.
2. Soit n un entier naturel écrit $\overline{3a4b}$ en base huit.
Écrire en base huit tous les entiers, n , qui sont divisibles par 42.
Montrer que ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique dont on donnera la raison écrite en base huit.

EXERCICE 2

3 POINTS

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. À tout point M de coordonnées $(x; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M . On désigne par \bar{z} le nombre conjugué de z .

1. Soit f l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 2i.$$

Préciser la nature de f et ses éléments remarquables.

2. Soit g la symétrie affine orthogonale de P par rapport à la droite Δ d'équation $y = x\sqrt{3} - 1$.
On note $M'' = g(M)$. Calculer les coordonnées $(x''; y'')$ de M'' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M .
3. Préciser la nature de la transformation $g \circ f$ et ses éléments remarquables.

PROBLÈME

14 POINTS

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle trois fois dérivables sur \mathbb{R} . On rappelle que \mathcal{F} muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel réel.

Partie A

Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{F} : f''' - 6f'' + 12f' - 8f = \theta\}$ où θ est l'application nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ; f', f'', f''' sont les dérivées première, seconde et troisième de f .

1. Montrer que \mathcal{E} muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel réel.
2. Vérifier que la fonction $f_0 : x \mapsto e^{2x}$ appartient à \mathcal{E} et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à \mathcal{E} est que la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}f(x)$ soit trois fois dérivables sur \mathbb{R} et vérifie $g''' = \theta$.
En déduire la forme générale des fonctions g puis la forme générale des éléments de \mathcal{E} .

Partie B

À tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on associe la fonction numérique

$$f_{a,b,c} : x \mapsto e^{2x}(a + bx + cx^2).$$

Soit E l'ensemble de toutes ces fonctions.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} et qu'il admet pour base (f_0, f_1, f_2) où

$$f_0 : x \mapsto e^{2x}, \quad f_1 : x \mapsto xe^{2x}, \quad f_2 : x \mapsto x^2e^{2x}$$

Donner les coordonnées de $f_{a,b,c}$ dans cette base.

2. Montrer que la dérivée première, $f'_{a,b,c}$ de $f_{a,b,c}$ appartient à E et donner ses coordonnées dans la base (f_0, f_1, f_2) .

Soit D l'application de E dans E qui à f associe f' . Montrer que D est un endomorphisme bijectif de E et déterminer l'application réciproque D^{-1} . En déduire la primitive de $f_{a,b,c}$ qui appartient à E.

3. Retrouver l'expression générale des primitives de $f_{a,b,c}$ en calculant tout d'abord $\int_0^x f_{a,b,c}(t) dt$ par des intégrations par parties successives.

4. On pose $D^1 = D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^{n+1} = D \circ D^n$.

Vérifier que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} D^n(f_0) &= 2^n f_0 \\ D^n(f_1) &= n2^{n-1} f_0 + 2^n f_1 \\ D^n(f_2) &= n(n-1)2^{n-2} f_0 + n2^n f_1 + 2^n f_2 \end{cases}$$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $f_{a,b,c}$ admet une dérivée d'ordre n , $f_{a,b,c}^{(n)}$.

Utiliser ce qui précède pour calculer $f_{a,b,c}^{(n)}$

Partie C

Soit h la fonction numérique définie par

$$h(x) = e^{2x} (2x^2 - 2x - 1).$$

- Étudier la fonction h et tracer sa courbe représentative dans un plan P rapporté à un repère orthonormé. (On donne $e^2 \approx 7,389$ et $e^{-2} \approx 0,135$).
- Soit D l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $f(x) \leq y \leq 0$. Calculer l'aire \mathcal{A} de D.